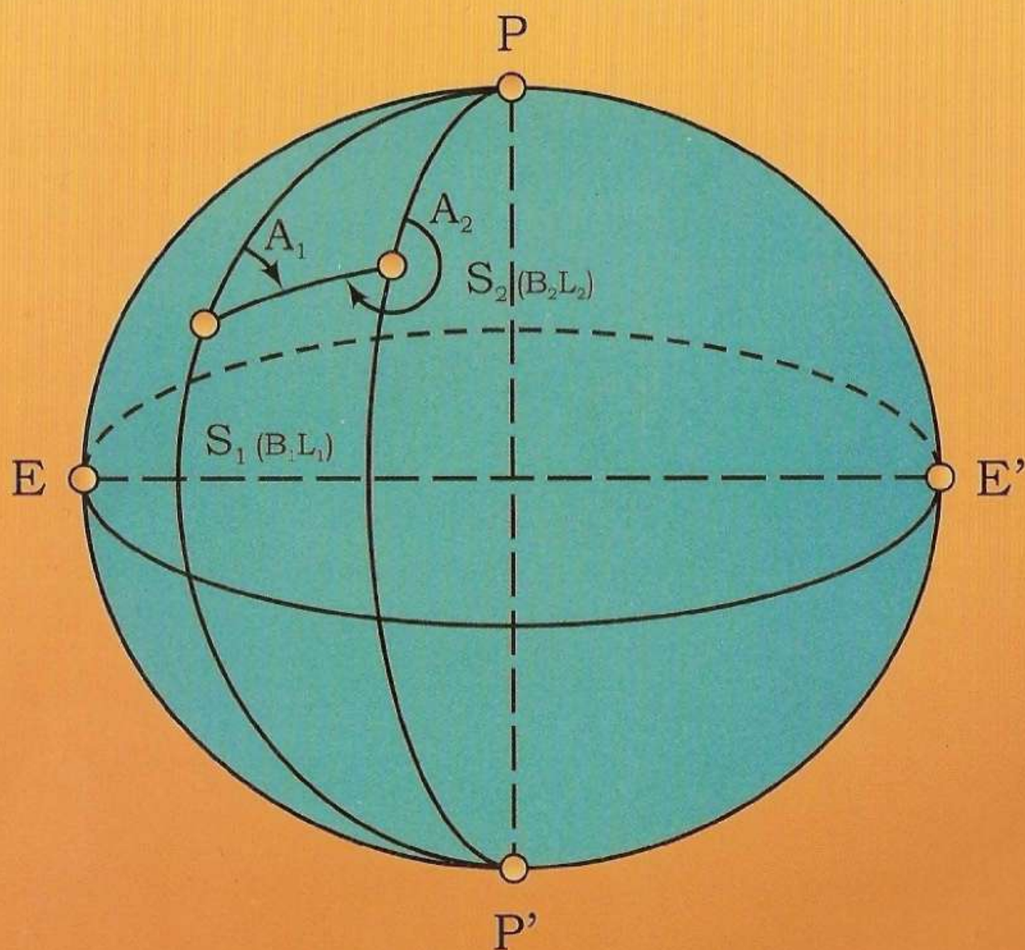
MIRCEA ORTELECAN

GEODEZIE



ACADEMICPRES
CLUJ-NAPOCA
2006

Conf.univ.dr.ing.Mircea ORTELECAN

GEODEZIE



EDITURA ACADEMICPRES
CLUJ-NAPOCA
2006

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ORTELECAN, MIRCEA
Geodezie / Mir... , 2006
Bibliogr.
Index
ISBN(10) 973-7
528



Referenţi ştiinţifici ai lucrării:

Prof. Univ. dr. **Nicolae Dima** – Universitatea din Petroşani

Prof. Univ. dr. **Octavian Herbei** - Universitatea din Petroşani

Copertă: **Ionuţ Gotea**

Editura AcademicPres

- Universitatea de Ştiinţe Agricole şi Medicină Veterinară Cluj-Napoca

Calea Mănăştur, nr.3, 3400 Cluj-Napoca

Tel. 0264-596384

Fax. 0264-593792

E-mail: cap@usamvcluj.ro

PREFATA

Lucrarea de faţă este destinată în primul rând studenţilor care studiază disciplinele geodezice şi poate fi utilă tuturor specialiştilor care activează în domeniul măsurătorilor terestre. In scopul completării cunoştinţelor de specialitate, în perioada actuală, studierea Pământului a devenit o necesitate importantă pentru nevoia şi dorinţa omului de a face noi descoperiri în domeniul măsurătorilor terestre.

Avantajul informatizării şi tehnologizării acestui domeniu deschide o perspectivă mai largă pentru o mai bună înţelegere a mediului înconjurător.

Lucrarea nu cuprinde tratarea întregului domeniu al Geodeziei şi nici toate implicaţiile de natură tehnică, aplicativă pe care le presupune, dar oferă cititorului baza necesară pentru abordarea unor probleme cu caracter general care să permită înţelegerea noţiunilor, metodelor şi principiilor absolut necesare pentru formarea pregătirii de specialitate a unui inginer geodez.

Lucrarea este structurată în 7 capitole şi anexe:

- Geodezie elipsoidală;
- Rezolvarea triunghiurilor geodezice pe suprafaţa elipsoidului de referinţă;
- Probleme geodezice de bază;
- Reţele geodezice;
- Rezolvarea reţelelor de triangulaţie prin metoda măsurătorilor indirecte;
- Rezolvarea reţelelor de triangulaţie prin metoda măsurătorilor condiţionate;
- Nivelmentul geodezic.

Prin conținutul său lucrarea are menirea de a clarifica elemente fundamentale cu care se operează în cadrul disciplinelor geodezice, reprezentând o sinteză a cunoştinţelor din domeniul geodeziei fizice şi matematice, a poziţionării planimetrice si altimetrice cât şi a prelucrării observaţiilor geodezice.

Structura lucrării este astfel concepută încât să îndeplinească, pe de o parte solicitările legate de buna desfăşurare a procesului de învăţământ, iar pe de altă parte oferă cititorului baza necesară pentru abordarea unor probleme care depăşesc prin amploare şi dificultate cadrul limitat al prelegerilor universitare.

Lucrarea completează cunoştinţele dobândite în cadrul cursului de topografie şi pune bazele teoretice necesare cursurilor de cartografie matematică şi geodezie satelitară, contribuind în acest mod la o pregătire pe un spectru larg a specialiştilor în măsurători terestre şi cadastrale.

Prof.univ.dr.ing. Nicolae DIMA
Universitatea din Petroşani

Prof.univ.dr.ing. Octavian HERBEI
Universitatea din Petroşani

INTRODUCERE

Geodezia, este ştiinţa care se ocupă cu studiul metodelor, precise, de măsurare şi determinare a formei şi dimensiunilor întregului glob pământesc, precum şi cu fixarea şi determinarea pe acesta a unor reţele de puncte, uniform şi omogen distribuite.

După Helmert(1843-1917) (citat de Ghiţău), "Geodezia este ştiinţa măsurării şi reprezentării suprafeţei Pământului", definiţie disputată şi în final unanim acceptată.O serie de alte definiţii ale geodeziei se regăsesc în [12] şi [13].

Scopul practic cel mai important al geodeziei este determinarea, prin măsurători, a poziţiei unui număr suficient de puncte geodezice, care permit să definească, cu precizie, figura unui continent sau a unei ţări.

Geodezia, cu elementele care le determină , stă la baza tuturor operaţiilor topografice şi fotogrammetrice, necesare întocmirii şi redactării planurilor şi hărţilor, utilizate la eloborarea proiectelor obiectivelor industriale şi civile.

Potrivit conţinutului problemelor de care se ocupă, geodezia se împarte în:

- **geodezia fizică**–studiază câmpul gravităţii şi figura pământului, necesare pentru definirea unor suprafeţe de referinţă şi a sistemelor de coordonate;
- **geodezia elipsoidală** – studiază suprafaţa elipsoidului, ca suprafaţă matematică, precum şi metodele de rezolvare a problemelor geodezice pe suprafaţa elipsoidului de referinţă;
- **geodezia geometrică clasică sau poziţionarea geodezică (triangulaţia geodezică)** – se ocupă cu proiectarea şi materializarea în teren a reţelelor

geodezice, cu metodele şi instrumentele folosite la efectuarea observaţiilor în reţele geodezice, precum şi cu prelucrarea observaţiilor efectuate în reţele;

- **astronomia geodezică** de poziţie - are ca scop determinarea directă a coordonatelor geografice a punctelor, folosind metodele astronomice;
- **geodezia spaţială** - tratează probleme legate de folosirea observaţiilor simultane ale sateliţilor artificiali, dintr-una sau mai multe staţii, sau a observaţiilor fotografice, laser, Doppler, în scopul determinării parametrilor orbitelor sateliţilor artificiali, determinării coordonatelor staţiilor într-un sistem unic de coordonate, determinarea figurii, formei şi a câmpului gravific terestru etc.

Datorită spaţiului restrâns afectat geodeziei, prin planul de învătământ pentru Colegiul de Cadastru agricol, din multitudinea problemelor de care se ocupă geodezia vor fi abordate câteva probleme de geodezie fizică şi elipsoidală, insistând mai mult asupra poziţionării planimetrice şi altimetrice a punctelor geodezice.

Problemele de trilateraţii, geodezie tridimensională geodezie satelitară şi astronomie geodezică, care nu se regăsesc în acest volum vor face obiectul unei alte lucrări.

Trebuie menţionat faptul că în dezvoltarea ei, geodezia clasică a reuşit, ca în preajma celui de-al doilea război mondial, să acopere suprafaţa uscatului cu reţele de triangulaţie, în scopuri ştiinţifice, economice şi militare. Astfel fiecare ţară şi-a dezvoltat o reţea de trangulaţie, cu un anumit punct fundamental, în care se determină latitudinea şi longitudinea prin metode astronomice, dar şi azimutul unei direcţii pentru orientarea reţelei.In punctul fundamental se consideră că elipsoidul este tangent la geoid, iar verticala locului (dată de poziţia firului cu plumb) coincide cu normala la elipsoid.

Datorită criteriilor de alegere subiective a elipsoidului

şi a sistemului de proiecţie adoptat, racordarea triangulaţiilor interstatale în general nu era posibilă.

Geodezia clasică nu putea rezolva două probleme de bază: legarea triangulaţiilor intercontinentale între ele şi a acestora de centrul de masă a Pământului. Aceste probleme au putut fi rezolvate odată cu lansarea primilor sateliţi artificiali şi respectiv cu perfecţionarea Sistemului de poziţionare globală G.P.S.

Rezolvarea problemei fundamentale a geodeziei şi anume determinarea formei şi dimensiunilor Pământului se poate realiza prin următoarele metode:

- metode geometrice , care constau din măsurători de arce de meridian şi paralele, măsurători complexe în reţele de triangulaţie , trilateraţie şi poligonometrie în scopul deducerii parametrilor de bază care definesc suprafaţa de referinţă;
- metode dinamice (fizice) care se ocupă cu determinarea acceleraţiei gravităţii şi a variaţiei acestuia, în scopul deterninării suprafeţei de nivel a câmpului gravitaţional al pământului;
- metode astronomo -geodezice şi cu sateliţi artificiali ai Pământului ,care au ca scop determinarea directă a coordonatelor geografice ale punctelor geodezice şi respectiv determinarea coordonatelor geocentrice ale punctelor de staţie şi ale sateliţilor.

1.GEODEZIA ELIPSOIDALA

1.1.Consideraţii generale

Geodezia elipsoidală este ştiinţa care stabileşte parametri geometrici şi ecuaţiile parametrice ale elipsoidului de referinţă (suprafaţa matematică cu ajutorul căreia se asimilează suprafaţa Pământului) şi de asemenea studiază metodele de rezolvare a problemelor geodezice pe suprafaţa elipsoidului considerat.

Pentru a face legătura cu literatura de specialitate, din alte ţări, trebuie menţionat că ,deşi studiază aceleaşi probleme, geodezia elipsoidală, este întâlnită sub denumirea de ***geodezie matematică*** (Jordan W. şi Eggert O. 1958), ***geodezie geometrică*** (Heiskanen W.şi Moritz H. 1967) şi ***geodezie sferoidală*** (Zakatov 1976).



Fig.1.1. Secţiune prin suprafaţa topografică

Din punct de vedere geometric, suprafaţa fizică a Pământului (fig.1.1.) este neregulată. şi se numeşte suprafaţă

topografică. Pe această suprafaţă se execută toate măsurătorile geodezice care, în vederea calculelor şi a reprezentării suprafeţei pe planul de proiecţie, se reduc la suprafaţa elipsoidului de referinţă.

Având în vedere că 2/3 din suprafaţa Pământului este acoperită de ape, iar cota medie a uscatului este de aproximativ 700 m, neglijabilă în raport cu raza Pământului (6371 km), forma generală a Pământului este dată de suprafaţa apelor oceanelor şi mărilor, în stare liniştită, prelungită imaginar pe sub continente. Această suprafaţă poartă numele de geoid (denumire introdusă de I.B.Lising în 1873) şi reprezintă suprafaţa de nivel zero, faţă de care se determină înălţimile punctelor.

Geoidul reprezintă o suprafaţă de nivel care are proprietatea că în orice punct al său direcţia forţei de greutate, dată de firul cu plumb, este perpendiculară pe această suprafaţă.Deoarece, direcţiile forţei de greutate depind şi de acţiunea atracţiei maselor dispuse neregulat în interiorul Pământului, rezultă, că din punct de vedere geometric ,forma suprafeţei geoidului este foarte complicată şi nu poate fi considerată ca o suprafaţă matematică pe care să se execute diferite calcule în vederea rezolvării unor probleme geodezice.

Neputând fi exprimată printr-o relaţie matematică, s-a căutat ca suprafaţa geoidului să fie substituită cu o altă suprafaţă mai simplă şi cât mai apropiată de ea.

Pe baza cercetărilor teoretice şi a prelucrării datelor obţinute prin măsurători astronomo-geodezice, s-a constatat că cea mai apropiată figură matematică de geoid este elipsoidul de rotaţie.

Pe baza măsurătorilor graduale, executate în vederea determinării elipsoidului Krasovski, s-a constatat că Pământul este de fapt un elipsoid triaxial, care are, pe lângă turtirea de la pol, o turtire la ecuator, la longitudinea vestică de 15.4^0. Acest

lucru face ca ecuatorul să nu mai fie un cerc ci, o elipsă care are între semiaxele sale o diferență de 69,5 ± 0.8m.

Utilizarea elipsoidului triaxial ar complica foarte mult calculele geodezice și cartografice, motiv pentru care Pământul este considerat un elipsoid biaxial. Pentru lucrările geodezice pe suprafețe mici, în vederea simplificării calculelor, Pământul poate fi aproximat cu o sferă de rază medie.

In (fig.1.1) sunt prezentate cele trei suprafețe amintite mai sus:suprafața topografică, geoidul și elipsoidul. Se constată că, în zona mărilor și oceanelor elipsoidul se situează deasupra geoidului, iar în zona uscatului se găsește sub geoid.

Se constată, de asemenea că, într-un punct "A" situat pe suprafața topografică, verticala locului, dată de direcția firului cu plumb, diferă de normala la elipsoid, aspect cunoscut sub denumirea de abatere de la verticală a normalei.

1.2.Elipsoidul de rotație

Pentru necesitățile geodezice și cartografice curente, geoidul este aproximat cu elipsoidul de rotație ,a cărui axă mică este paralelă cu axa de rotație a Pământului, iar centrul său geometric în apropierea centrului de masă a Pământului .

Acest elipsoid este denumit ***elipsoid de referință*** și este utilizat la un moment dat pentru rezolvarea problemelor geodezice.

Măsurătorile efectuate în vederea determinării dimensiunilor unui elipsoid de referință cât mai apropiate de cele ale geoidului, au dat valori în concordanță cu numărul de măsurători și distribuția lor pe suprafața Pământului precum și cu nivelul științei și tehnicii la data respectivă.

După opiniile unor geodezi, nepotrivirile în înălțime dintre geoid și elipsoidul determinat și poziționat în corpul

Pământului poate să ajungă până la 100-150m.Trebuie menționat, că abaterea suprafeței terestre față de geoid este mult mai mare și este dată de cotele absolute ale punctelor suprafeței fizice ale terenului.

Neconcordanțele existente între suprafețele menționate nu pot fi neglijate și de aceea ,trebuie să se țină seama de nesuprapunerea acestor suprafețe. Din această cauză, datele măsurate direct pe suprafața topografică vor fi proiectate pe suprafața elipsoidului de referință ,prin aplicarea corecțiilor aferente. După proiectarea datelor geodezice (unghiuri, lungimi, diferențe de nivel) pe suprafața de referință se poate face prelucrarea matematică riguroasă, prin care se determină coordonatele unor puncte poziționate pe suprafața topografică, proiectate pe suprafața de referință.

Suprafața de referință care aproximează cel mai bine suprafața geoidului și a cărei axă de rotație coincide cu axa de rotație a Pământului, iar centrul său geometric coincide cu centrul de masă a Pământului se numește ***elipsoid terestru general***.Acest elipsoid are o valoare de principiu, o noțiune teoretică, fiind limita către care tind determinările concrete ale elipsoizilor de referință.

În decursul timpului, diverși geodezi au determinat diferite serii de valori ale dimensiunilor elipsoidului de referință.

În tabelul 1.1 sunt date câteva din rezultatele cele mai importante ale dimensiunilor elipsoizilor de referință.

Tabelul 1.1

Denumirea elipsoidului de referință	Anul	Semiaxa mare "a" (km)	Turtirea "f:"	Perioada de utilizare în România
Bessel	1841	6.377,39715	1:299,1528	1873-1916
Clarke	1880	6.378,243	1:293,465	1916-1930
Hayford	1909	6.378,388	1:297,0	1930-1951

Krasovski	1940	6.378,245	1:298,3	1951-
WGS 84	1984	6.378,137	1:298,2572	1992-

1.2.1.Scopul şi importanţa elipsoidului de referinţă

După cum este cunoscut toate măsurătorile geodezice şi topografice se efectuează pe suprafaţa fizică topografică a Pământului cu care ia contact în mod direct.

Prelucrarea acestor măsurători urmăreşte în principal determinarea pe suprafaţa terestră a unor puncte geodezice de sprijin de prim ordin (ordinul I) pe suportul cărora urmează a se determina punctele de ordinul II, III, IV, V şi în continuare punctele de detalii necesare la întocmirea planurilor topografice.

Metodele de prelucrare aplicate în determinarea punctelor geodezice sunt: triangulaţia, trilateraţia, şi poligonometria sau combinaţii între acestea, care se vor studia ulterior.

Pentru punctele geodezice de ordinul I ,măsurătorile efectuate pe suprafaţa topografică se raportează la suprafaţa elipsoidului de referinţă, iar pe aceasta din urmă se vor efectua calculele necesare.

În unele cazuri de precizie mai mică, suprafaţa elipsoidului se va putea înlocui, pentru prelucrarea măsurătorilor şi cu suprafaţa unei sfere de rază medie.

Rezultă că suprafaţa elipsoidului de referinţă este utilizată în stabilirea reţelelor geodezice de sprijin, faţă de care se dezvoltă lucrările geodezice ulterioare într-un sistem unitar şi omogen.

Calculele necesare pentru determinarea punctelor geodezice de ordinul II – V se efectuează pe o suprafaţă plană.

Fiind realizată o reţea de puncte geodezice, care ia în considerare forma curbă a Pământului, există o bază ştiinţifică de redactare a planurilor topografice, deci de ridicare cu precizie a suprafeţelor de orice mărime. De asemenea, ridicările geodezice de precizie sunt importante şi în diferite studii inginereşti, la proiectarea diferitelor obiective şi la aplicarea lor în teren.

1.3.Sisteme de coordonate utilizate în geodezie

Sistemele de coordonate utilizate în geodezie se clasifică după mai multe criterii, prezentate pe larg în [10].

După Giţău [12], acestea se clasifică în sisteme naturale şi convenţionale, care la rândul lor se împart în sisteme globale şi sisteme locale.

1.3.1.Sistemul de coordonate naturale

Sistemele naturale exprimă modalitatea de definire a coordonatelor în raport de mărimi naturale , iar pe de altă parte indică legătura dintre acestea şi procesele de măsurare.

1.3.1.1.Sistemul cartezian geocentric

Sistemul natural global geocentric are originea în centrul de masă a Pământului, axa Z pe direcţia axei de rotaţie a Pământului, axa X pe direcţia meridianului astronomic Greenwich, iar axa Y spre est (fig.1.2).

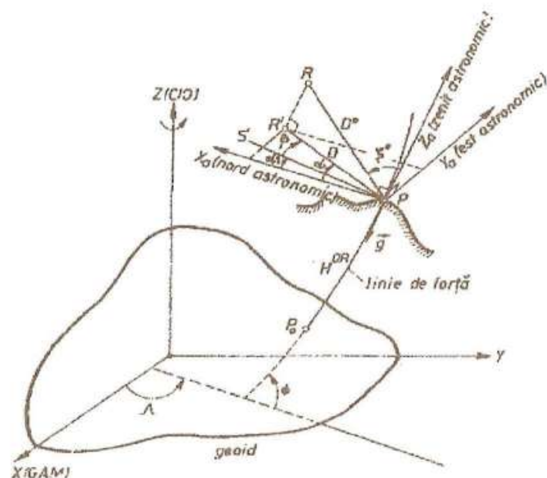


Fig.1.2. Sisteme de coordonate naturale

De menţionat că direcţia axei Z se mai notează cu CIO (Conventional International Origin) şi defineşte poziţia medie a polului pentru perioada 1900-1905.

Axa X este situată pe direcţia meridianului astronomic mediu al punctului Greenwich, motiv pentru care se mai notează cu GAM.

Un punct "P" situat pe suprafaţa fizică a Pământului este determinat prin coordonatele carteziene geocentrice X,Y, Z sau diferenţe de asemenea coordonate, obţinute pe baza măsurătorilor satelitare din sistemul GPS, Glonass şi în perspectivă Gallileo.

Acelaşi punct poate fi determinat prin coordonatele astronomice "Φ"şi"Λ", completate cu altitudinea ortometrică "H^{OR}". Aceste coordonate se numesc coordonate astronomice globale, deşi "H^{OR}" nu este dedusă prin metode astronomice.

Prin "Φ" s-a notat *latitudinea astronomică* şi reprezintă unghiul format de verticala ce trece prin punctul "P" cu planul ecuatorial.

Prin "Λ" s-a notat *longitudinea astronomică* şi reprezintă unghiul diedru format de meridianul astronomic ce trece prin Greenwich cu meridianul astronomic al punctului "P".

H^{OR}- reprezintă înălţimea pe verticală dintre proiecţia pe geoid a punctului "P" (P_0) şi punctul "P" situat pe suprafaţa topografică (fig.1.2.).

Coordonatele astronomice "Φ" şi "Λ" determină poziţia verticalei în punctul considerat, iar prin calarea teodolitelor în punctele de staţie se aduce axa principată a acestora în poziţie verticală, încadrând astfel observaţiile geodezice în sistemul natural de referinţă.

1.3.1.2.Sistemul astronomic local

In sistemul local (topocentric), originea coordonatelor se găseşte în punctul de staţie considerat "P". Sistemul se caracterizează prin:

- Dispunerea axei "Z_a" după tangenta la linia de forţă, către zenitul astronomic.
- Poziţionarea planului X_aY_a perpendicular pe direcţia gravitaţiei, considerent pe baza căruia este denumit şi plan orizontal.
- Axa "X_a" este situată în meridianul astronomic al punctului considerat, cu sensul pozitiv pe direcţia nord, iar axa "Y_a" este îndreptată pe direcţia estului astronomic.

In raport cu topocentru poziţia oricărui punct învecinat "R" poate fi exprimată prin coordonatele carteziene

astronomice locale X_{aR}, Y_{aR}, Z_{aR}, care se pot calcula din măsurătorile geodezice:

- D^0 - distanța înclinată dintre cele două puncte;
- α – azimutul astronomic, care este unghiul format de direcția nordului astronomic cu direcția PR;
- ζ^0 – unghiul zenital,format între verticala locului și direcția de viză PR.

cu relația:

$$\begin{pmatrix} X_{aR} \\ Y_{aR} \\ Z_{aR} \end{pmatrix} = D^0 \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\zeta^0 \\ \sin\alpha \sin\zeta^0 \\ \cos\zeta^0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

1.3.2.Sistemul de coordonate convenționale

Aceste sisteme , se definesc în raport cu elipsoidul de referință pe care se proiectează rețelele geodezice de sprijin, de ordin superior. Dacă sistemul natural de coordonate se raportează la procesele de măsurare, sistemul convențional de coordonate se raportează la procesele de calcul.

1.3.2.1.Sistemul global elipsoidal

Sistemul global elipsoidal are originea $\overline{O}$, în centrul elipsoidului de referință, centru situat în apropierea centrului de greutate a Pământului. Axele sistemului global elipsoidal au anumite unghiuri de rotire ($\varepsilon_{\overline{X}}, \varepsilon_{\overline{Y}}, \varepsilon_{\overline{Z}}$), față de axele sistemului global geocentric.

Poziționarea sistemului global elipsoidal în interiorul sistemului global geocentric constituie una din problemele fundamentale ale geodeziei.

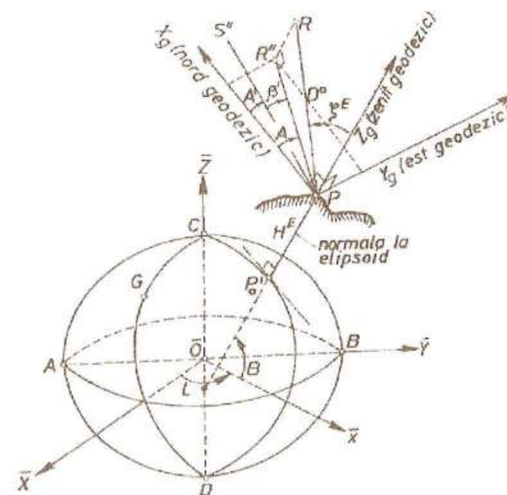


Fig.1.3.Sisteme de coordonate convenționale

Poziția unui punct "P", situat pe suprafața fizică a Pământului poate fi definit prin coordonatele carteziene $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, în raport cu originea $\overline{O}$ (fig.1.3).

Poziția aceluiași punct poate fi definită prin coordonatele globale elipsoidale "B", "L", "H^E", în care:

- Latitudinea geodezică "B" este unghiul format de normala la elipsoid dusă din punctul "P" cu planul ecuatorial elipsoidal.
- Longitudinea geodezică "L" este unghiul diedru format de meridianul Greenwich cu meridianul punctului "P".

- Altitudinea elipsoidală "H^E" este înălţimea pe normală între punctul "P' şi proiecţia lui pe elipsoid" P_0'".

De menţionat că în unele tratate coordonatele geodezice "B", "L" se notează cu "φ" , "λ" şi se numesc coordonate geografice geodezice.

1.3.2.2.Sistemul elipsoidal local

Prin analogie cu sistemul astronomic local se poate defini sistemul elipsoidal local (fig.1.3), în care punctul de staţie "P" este originea sistemului, iar direcţia pozitivă a axelor de coordonate se prezintă după cum urmează:

- Axa"Z_g" este orientată după normala la elipsoid dusă din punctul considerat "P", către zenitul geodezic;
- axa "X_g" este situată în meridianul geodezic al punctului "P", orientată spre nordul geodezic;
- axa "Y_g" este orientată spre estul geodezic.

Poziţia unui punct "R" poate fi definită prin coordonatele elipsoidale polare locale D^0, A, ζ^E, în care:

- D^0 – distanţa măsurată înclinată;
- A – azimutul geodezic;
- ζ^E -unghiul zenital elipsoidal.

De asemenea poziţia punctului "R" poate fi definită prin coordonatele rectangulare locale X_{gR}, Y_{gR}, Z_{gR}. Intre cele două sisteme de coordonate se pot scrie relaţii de forma (1.1).

1.4.Parametri elipsoidului de referinţă

Considerând suprafaţa elipsoidului de referinţă ca suprafaţă a unui elipsoid de rotaţie, ce rezultă prin rotirea unei

elipse meridiane în jurul axei mici, atunci ecuaţia elipsei meridian situată în planul xoz (fig.1.4) este dată de cunoscuta relaţie:

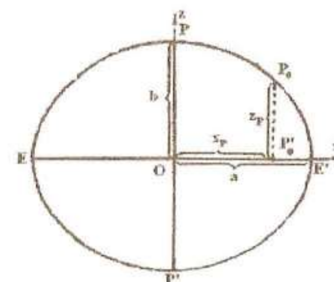


Fig.1.4. Elipsa meridian

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (1.2)$$

în care:

a – semiaxa mare a elipsoidului (ecuatorială);

b – semiaxa mică a elipsoidului (polară) .

In consecinţă, elipsoidul de rotaţie poate fi definit, geometric, prin minim doi parametri, dintre care, în mod obligatoriu, unul este liniar.In continuare se vor prezenta parametri geometrici ai elipsoidului de rotaţie şi relaţiile derivate necesare în calculele geodezice:

1. a -semiaxa mare (raza ecuatorială);
2. b -semiaxa mică;
3. $f=\frac{a-b}{a}$ - turtirea geometrică;
4. $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ - prima excentricitate;

5 $e'=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{b^2}}$ - a doua excentricitate;

6. $E=\sqrt{a^2+b^2}$ - excentricitatea liniară;

7. $c=\dfrac{a^2}{b}$ - raza de curbură polară.

Primii trei parametri se numesc parametri geometrici principali, iar pentru definirea elipsoidului de rotație se utilizează, de regulă, semiaxa mare și turtirea geometrică.

Relațiile scrise între parametri geometrici 3,4 și 5 pot avea și alte forme după cum urmează:

$$f=1-\frac{b}{a}.\Rightarrow.1-f=\frac{b}{a} \qquad (1.3)$$

$$e^2=1-\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow 1-e^2=\frac{b^2}{a^2} \qquad (1.4)$$

$$e'^2=\frac{a^2}{b^2}-1 \Rightarrow 1+e'^2=\frac{a^2}{b^2} \qquad (1.5)$$

Din (1.3) se poate calcula semiaxa mică în funcție de semiaxa mare și turtirea geometrică:

$$b=a(1-f) \qquad (1.6)$$

Din (1.4) și (1.5) rezultă:

$$1-e^2=\frac{1}{1+e'^2} \Rightarrow e^2=1-\frac{1}{1+e'^2} \Rightarrow e^2=\frac{e'^2}{1+e'^2} \qquad (1.7)$$

In mod similar se poate scrie:

$$1+e'^2=\frac{1}{1-e^2} \Rightarrow e'^2=\frac{1}{1-e^2}-1 \Rightarrow e'^2=\frac{e^2}{1-e^2} \qquad (1.8)$$

Din relația (1.3) prin ridicare la pătrat, ținând seama de (1.4) și considerând $f^2=0$, se poate scrie:

$$(1-f)^2=\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow 1-2f-f^2=\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow 2f=1-\frac{b^2}{a^2}=e^2 \qquad (1.9)$$

Din relația (1.9) se calculează turtirea din prima excentricitate:

$$f=\frac{e^2}{2} \qquad (1.10)$$

1.5. Ecuațiile parametrice ale elipsoidului de rotație

Raportând elipsoidul de rotație la sistemul de referință oxyz (fig.1.5) se disting următoarele elemente:

- EE_1 – ecuatorul;
- PGP' – meridianul origine;
- $E'E_1'$ - paralela punctului "M_0";
- $\overline{V}$ - normala la suprafața elipsoidului în punctul "M_0";
- $\overline{T_m}$ - tangenta în "M_0" la curba neridiană;
- $\overline{T_p}$ - tangenta în "M_0" la paralelă.

Poziția punctului "M_0" poate fi stabilită prin coordonatele rectangulare XYZ, sau prin coordonatele geografice elipsoidale B,L.

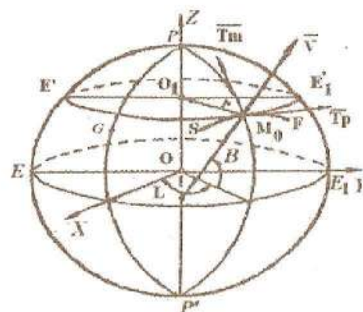


Fig.1.5.Elipsoidul de rotație

Sub formă implicită, ecuația unui elipsoid biaxial de rotație este dată de relația:

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2}+\frac{Z^2}{b^2}=1 \qquad (1.11)$$

In mod frecvent, în geodezia elipsoidală se operează cu ecuațiile parametrice.

A stabili ecuațiile parametrice ale elipsoidului de referință înseamnă a stabili o corespondență între cele două sisteme de coordonate, de forma:

$$\begin{aligned} X &= f_1(B, L) \\ Y &= f_2(B, L) \\ Z &= f_3(B) \end{aligned} \qquad (1.12)$$

In acest scop considerăm elipsa meridiană ce trece prin punctul "M_0". de coordonate curente x, z care verifică ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (1.13)$$

Diferențiind ecuația (1.13) se obține:

$$\frac{2xdx}{a^2}+\frac{2zdz}{b^2}=0 \qquad (1.14)$$

Fie un punct "M'_0" situat la distanța elementară față de punctul "M_0" (fig.1.6). Acestui punct îi corespund față de punctul "M_0" creșterile în coordonate – dx și dz.

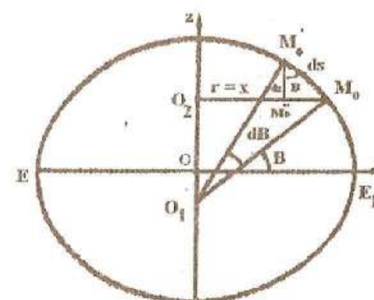


Fig.1.6.Ecuațiile parametrice ale elipsei meridian

Creșterea coordonatei "x" a punctului "M_0" este negativă pentru faptul că , la o creștere a latitudinii "B" odată cu deplasarea punctului din "M_0" în "M'_0"distanța O_2M_0 scade.

În triunghiul dreptunghic elementar $M_0M_0''M_0'$ se poate considera arcul M_0M_0' ca fiind un element liniar şi în consecinţă putem scrie:

$$-\frac{dx}{ds} = \sin B; \quad \frac{dz}{ds} = \cos B; \tag{1.15}$$

Dacă se împarte ecuaţia (1.14) prin 2ds şi se ia în considerare relaţia (1.15) se oţine:

$$-\frac{x}{a^2}\sin B + \frac{z}{b^2}\cos B = 0 \tag{1.16}$$

Înmulţind (1.16) cu a^2 se obţine :

$$-x\sin B + \frac{a^2}{b^2}z\cos B = 0 \tag{1.17}$$

Conform relaţiilor (1.5) şi (1.8) ecuaţia (1.17) devine :

$$-x\sin B + \frac{z}{1-e^2}\cos B = 0 \tag{1.18}$$

de unde :

$$z = x(1-e^2)\mathrm{tg}B \tag{1.19}$$

Plecând de la ecuaţia elipsei meridian (1.13), înmulţind cu a^2 şi luând în considerare relaţiile (1.5) şi (1.8) se obţine:

$$x^2 + \frac{z^2}{1-e^2} = a^2 \tag{1.20}$$

Inlocuind în relaţia (1.20) relaţia (1.19) se obţine:

$$x^2 + x^2(1-e^2)\mathrm{tg}^2B = a^2 \tag{1.21}$$

Inlocuind tangenta în funcţie de sin şi cos se obţine:

$$x^2\cos^2B + x^2\sin^2B - x^2e^2\sin^2B = a^2\cos^2B \tag{1.22}$$

sau:

$$x^2(1-e^2\sin^2B) = a^2\cos^2B \tag{1.23}$$

de unde :

$$x = \frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \tag{1.24}$$

Înlocuind pe "x" din (1.24) în expresia (1.19) obţinem :

$$z = \frac{a(1-e^2)\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \tag{1.25}$$

Pentru scrierea mai concentrată şi pentru uşurarea calculelor practice se utilizează notaţiile:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-e^2\sin^2 B} &= W \\ \sqrt{1+e'^2\cos^2 B} &= V \end{aligned} \tag{1.26}$$

şi cu acestea , ecuaţiile (1.24) şi (1.25) devin

$$x = \frac{a \cos B}{W} \qquad z = \frac{a(1-e^2)\cos B}{W} \qquad (1.27)$$

Expresiile (1.27) reprezintă ecuaţiile parametrice ale elipsei meridiane.

Analizând fig.1.5 se poate scrie :

$$X = x \cos L \qquad Y = x \sin L \qquad Z = z \qquad (1.28)$$

Inlocuind expresiile (1.27) în (1.28) obţinem ecuaţiile parametrice ale elipsoidului de referinţă:

$$X = \frac{a \cos B \cos L}{W} \qquad Y = \frac{a \cos B \sin L}{W} \qquad Z = \frac{a(1-e^2)\sin B}{W} \qquad (1.29)$$

Ecuaţiile parametrice ale elipsoidului de rotaţie (1.29) se mai pot exprima în funcţie raza polară "c" şi funcţia auxiliară "V", plecând de la relaţia (1.26):

$$W^2 = 1 - e^2\sin^2 B = 1 - \frac{e'^2}{1+e'^2}(1-\cos^2 B) = \frac{1+e'^2\cos^2 B}{1+e'^2} = (1-e^2)V^2 \qquad (1.30)$$

Introducând relaţia (1.4) în (1.30) se obţine

$$W^2 = \frac{b^2}{a^2}V^2 \qquad (1.31)$$

Efectuând radical şi inversând relaţia (1.31) se obţine:

$$\frac{1}{W} = \frac{a}{b}\frac{1}{V^2} \qquad (1.32)$$

Inmulţind relaţia (1.32) cu semiaxa mare "a" şi ţinând seama de expresia razei polare "c"rezultă:

$$\frac{a}{W} = \frac{a^2}{b}\frac{1}{V} = \frac{c}{V} \qquad (1.33)$$

In baza egalităţii (1.33), ecuaţiile (1.29) devin :

$$X = \frac{c \cos B \cos L}{V} \qquad Y = \frac{c \cos B \cos L}{V} \qquad Z = \frac{c \cos B \cos L}{V} \qquad (1.34)$$

1.6. Razele principale de curbură

Considerând punctul "S", pe suprafaţa elipsoidului de referinţă. (fig.1.7), prin acest punct pot fi duse o infinitate de curbe, din care două curbe se numesc principale. Este vorba de curba meridiană şi de curba normală la aceasta, denumită curba primului vertical.

Aceste curbe, în punctul "S" au raze de curbură diferite, astfel curba meridiană cu centrul de curbură în punctul "O′" are raza de curbură "M", iar curba normală la curba meridiană, cu centrul de curbură în punctul "O", are raza de curbură "N".

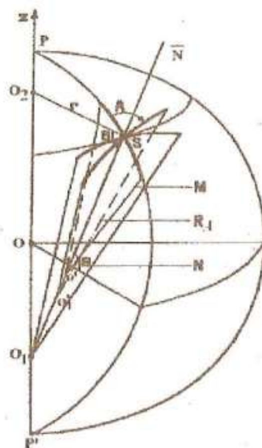


Fig.1.7 Razele de curbură

Razele de curbură "M" şi "N" se numesc raze principale de curbură, cunoscute şi sub numele de raza mică şi raza mare. Oricare altă curbă ce aparţine infinităţii de curbe concurente în punctul "S" va avea raza de curbură corespunzătoare "R_A" a cărei valoare se află cuprinsă între "M"

şi "N". Indicele razei de curbură arată faptul că, în punctul "S", curba considerată are azimutul geodezic "A".

Aşadar, într-un punct oarecare considerat pe suprafaţa elipsoidului de referinţă există o infinitate de raze de curbură , corespunzătoare infinităţii de curbe situate pe suprafaţa elipsoidului şi concurente în punctul respectiv. Valorile extreme ale acestor raze sunt date de razele principale.

În calculele geodezice intervine şi aşa numita rază medie "R_m", a cărei valoare se obţine pe baza valorilor tuturor razelor de curbură existente în punctul respectiv.

În cele ce urmează se vor stabili expresiile razelor de curbură M, N, R_A şi R_m.

1.6.1. Raza de curbură a elipsei meridiane "M"

Elipsa meridiană se obţine prin intersecţia unui plan normal pe elipsoidul de rotaţie ce cuprinde axa de rotaţie (trece prin cei doi poli).

Considerăm un punct oarecare "M_0", pe suprafaţa elipsoidului de referinţă, de latitudine "B" şi elipsa meridiană ce trece prin acesta (fig.1.8).

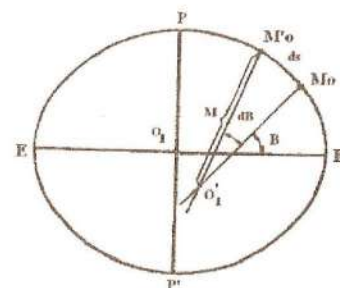


Fig.1.8. Raza elipsei meridiană

Pe elipsa meridiană se consideră punctele "M_0" de latitudine "B" şi "M_0'"de latitudine B+dB, situate la o distanţă elementară "*ds*" unul faţă de altul.

Elementul de arc de elipsă M_0M_0' se aproximează cu un arc de cerc de rază "M", şi în acest caz se poate scrie că lungimea arcului este egală cu raza "M" deînmulţită cu unghiul la centru dB:

$$ds = M \cdot dB \tag{1.35}$$

Din relaţia (1.35), ridicată la pătrat, se calculează raza mică de curbură:

$$M^2 = \frac{ds^2}{dB^2} \tag{1.36}$$

Revenind la fig.1.6 se observă că :

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 \tag{1.37}$$

Inlocuind relaţia (1.37) în (1.36) se obţine

$$M^2 = \frac{dx^2 + dz^2}{dB^2} \tag{1.38}$$

sau

$$M = \sqrt{\left(\frac{dx}{dB}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dB}\right)^2} \tag{1.39}$$

Derivând ecuaţiile (1.27) în raport cu latitudinea "B" se obţine:

$$\frac{dx}{dB} = a[-\sin B\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{-\frac{1}{2}} +$$
$$+\frac{1}{2}\cos B(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}.2e^2\sin B\cos B] =$$
$$= a\sin B[-\frac{1}{W}+\frac{e^2\cos^2 B}{W^3}] = \frac{a\sin B}{W^3}[-W^2+e^2\cos^2 B] =$$
$$= \frac{a\sin B}{W^3}[-(1-e^2\sin^2 B)+e^2\cos^2 B] =$$
$$= \frac{a\sin B(1-e^2)}{W^3} \tag{1.40}$$

In mod analog se calculează şi cealaltă derivată, în urma căruia se obţine:

$$\frac{dz}{dB} = \frac{a\left(1-e^2\right)\cos B}{W^3} \tag{1.41}$$

Inlocuind relaţiile (1.40) şi (1.41) în (1.39) se determină expresia razei de curbură a elipsei meridiane:

$$M = \frac{a\left(1-e^2\right)}{W^3} = \frac{c}{V^3} \tag{1.42}$$

Menţionăm că ţinând seama de (1.33) se poate demonstra relaţia:

$$\frac{a}{W^3} = \frac{c}{V^3(1-e^2)} \tag{1.43}$$

In acest fel se confirmă modul de exprimare al elipsei meridian în funcție de raza polară și funcția auxiliară "V^3".

Tinând seama de expresiile de calcul ale funcțiilor auxiliare "W" și"V", rezultă că raza de curbură a elipsei meridiane este funcție de latitudinea punctului în care se determină și aceasta variază de la ecuator la pol.

$$M_{0^0} = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{\left(1-e^2\sin^2 0^0\right)^3}} = a(1-e^2) \tag{1.44}$$

$$M_{90^0} = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{\left(1-e^2\sin^2 90^0\right)^3}} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}-1}} = \frac{a}{(\frac{b^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{\frac{b}{a}} = \frac{a^2}{b} = c \tag{1.45}$$

1.6.2.Raza de curbură a primului vertical "N"

Considerăm din nou punctul "M_0" de latitudine "B" și elipsa meridiană ce trece prin el (fig.1.9). Secțiunea normală a primului vertical este perpendiculară pe secțiunea elipsei meridiane.

Dacă "r" este raza paralelei geografice pe care se află punctul considerat și dacă această rază este pe direcția axei "x" ($r \equiv s$), atunci din triunghiul dreptunghic $M_0O_2O_1^{'}$ rezultă:

$$N = \frac{r}{\cos B} = \frac{x}{\cos B} \tag{1.46}$$

In (1.46) se înlocuiește "x" cu expresia din (1.27) și se obține :

$$N = \frac{a}{W} = \frac{c}{V} \tag{1.47}$$

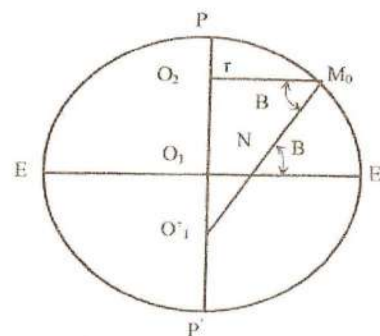


Fig.1.9. Raza primului vertical

Raza mare de curbură este funcție de asemenea de latitudinea punctului în care se determină și variază de la ecuator la pol, astfel:

$$N_{0^0} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 0^0}} = a \tag{1.48}$$

$$N_{90^0} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 90^0}} = \frac{a}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{\frac{b}{a}} = \frac{a^2}{b} = c \tag{1.49}$$

Din relațiile (1.48) și (1.49) se remarcă faptul că la ecuator raza mare de curbură este egală cu semiaxa ecuatorială, iar la pol este egală cu raza polară "c", care este mai mare decât semiaxa ecuatorială "a".

Comparând relațiile (1.46), (1.47) cu (1.48) (1.49) se constată că $N \geq M$.

1.6.3.Raza de curbură a unei secțiuni normale în funcție de azimut

Dacă într-un punct oarecare "M_0" considerat pe suprafața elipsoidului de referință se duce o curbă oarecare de azimut geodezic "A", atunci raza de curbură a acesteia va fi "R_A"(fig.1.10).

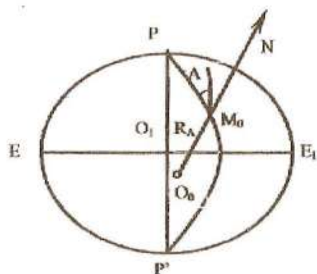


Fig.1.10.Raza de curbură de azimut dat

Pentru a stabili expresia ce o definește, secționăm suprafața elipsoidului cu un plan perpendicular pe normala punctului "M_0" și situat la distanța Δz de acesta.

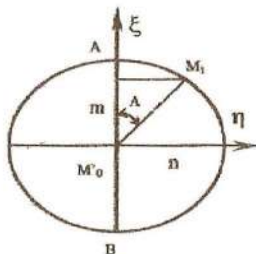


Fig.1.10.a. Elipsa de secționare

Se va obține o elipsă de secțiune ale cărei semiaxe pe direcțiile curbelor principale le notăm cu „m" și „n" (fig.1.10.a).

Pe baza elementelor geometrice existente în planul elipsei meridiane a punctului "M_0" (fig.1.10.b) se poate scrie :

$$m^2 = M^2 - (M - \Delta z)^2 = 2M\Delta z - \Delta z^2 \qquad (1.50)$$

In relația (1.50), termenul Δz^2 este foarte mic în raport cu raza de curbură "M" și se neglijează, deci :

$$m^2 = 2M\Delta z \qquad (1.51)$$

În mod analog, considerând elementele geometrice din planul curbei normale la meridian și din planul curbei de direcție "A", obținem :

$$\begin{aligned} n^2 &= 2N\Delta z \\ s^2 &= 2R_A\Delta z \end{aligned} \qquad (1.52)$$

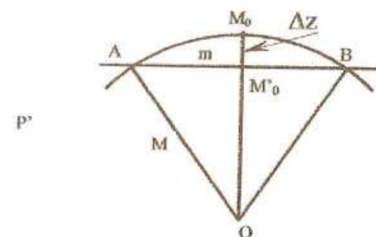


Fig.1.10.b.Adâncimea planului de secționare

Din egalitățile (1.51) și (1.52) rezultă :

$$\Delta z = \frac{m^2}{2M} = \frac{n^2}{2N} = \frac{s^2}{2R_\alpha} \qquad (1.53)$$

Dacă raportăm elipsa de secțiune la sistemul particular de coordonate, ξ, η, atunci coordonatele punctului "M_1", verifică ecuația :

$$\frac{\xi^2}{m^2} + \frac{\eta^2}{n^2} = 1 \qquad (1.54)$$

însă:

$$\xi = \text{s cos A}$$
$$\eta = \text{s sin A} \qquad (1.55)$$

putem scrie:

$$\frac{s^2 \cos^2 A}{m^2} + \frac{s^2 \sin^2 A}{n^2} = 1 \qquad (1.56)$$

Ecuația (1.56) , în baza seriei de rapoarte egale (1.53), devine :

$$\frac{\cos^2 A}{2\Delta z M} + \frac{\sin^2 A}{2\Delta z N} = \frac{1}{2\Delta z R_A} \qquad (1.57)$$

de unde prin înmulțirea cu 2Δz și aducerea la același numitor în partea stângă a egalității (1.57) se obține:

$$R_A = \frac{MN}{N\cos^2 A + M \sin^2 A} \qquad (1.58)$$

Analizând expresia (1.58) din punct de vedere al factorilor componenți se constată că, raza de curbură a unei curbe de azimut geodezic "A", este funcție de raza mare și raza mică de curbură, implicit de latitudinea punctului în care se determină și de azimutul geodezic "A" ce poziționează curba pe suprafața elipsoidului.

Din punct de vedere al mărimii razei "R_A" în raport cu razele principale de curbură se constată că: $M \le R_A \le N$. Acest lucru se obține prin introducerea în (1.58) a expresiilor de calcul a razelor principale de curbură la ecuator și la pol.

$$R_A = \frac{M}{\cos^2 A + \frac{M}{N}\sin^2 A} = \frac{\frac{a(1-e^2)}{W^3}}{\cos^2 A + \frac{(1-e^2)}{W^2}\sin^2 A} =$$

$$= \frac{\frac{a(1-e^2)}{W}}{W^2\cos^2 A^2 + (1-e^2)\sin^2 A} = \frac{\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)\cos^2 A^2 + (1-e^2)\sin^2 A} \qquad (1.59)$$

Pentru B=0 relația (1.59) devine:

$$R_A = \frac{a(1-e^2)}{\cos^2 A^2 + (1-e^2)\sin^2 A} = \frac{a(1-e^2)}{1-e^2\sin^2 A} = \frac{M_{0^\circ}}{1-e^2\sin^2 A} \qquad (1.60)$$

In relația (1.60), numitorul fiind subunitar ,rezultă $R_A > M$, la ecuator, sau pentru A=0 rezultă $R_A = M$.

Pentru B=90 relația (1.59) devine:

$$R_A = \frac{\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2}}}{(1-e^2)\cos^2 A + (1-e^2)\sin^2 A} =$$

$$\frac{\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2}}}{1-e^2} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a}{\frac{b}{a}} = \frac{a^2}{b} = c = N_{90^0} \qquad (1.61)$$

1.6.5. Raza medie de curbură "R_m"

Raza medie de curbură într-un punct oarecare situat pe suprafaţa elipsoidului de referinţă se determină ca medie aritmetică a razelor de curbură "R_A" corespunzătoare curbelor ce trec prin acest punct.

$$R_m = \frac{1}{n}\sum_1^n R_A \text{, când } n \to \infty \qquad (1.62)$$

Considerând că, între două curbe vecine există un unghi elementar $\Delta\alpha$, numărul curbelor şi deci al razelor de curbură va fi :

$$n = \frac{2\pi}{\Delta A} \qquad (1.63)$$

Astfel expresia razei medii de curbură scrisă prin trecerea de la sumă la integrală devine :

$$R_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_A dA \qquad (1.64)$$

Având în vedere simetria ce există în raport cu direcţiile principale, determinată de curbele principale, putem considera doar razele de curbură cuprinse între 0° şi 90°. Astfel putem scrie:

$$R_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R_A dA \qquad (1.65)$$

Inlocuind în (1.65) expresia razei de curbură a unei curbe de azimut "A" dată de relaţia (1.58) se obţine :

$$R_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{MN}{N\cos^2 A + M\sin^2 A} dA \qquad (1.66)$$

Pentru rezolvarea integralei se aplică câteva artificii de calcul , după care se trece la schimbarea de variabilă. Artificiile de calcul constau din împărţirea expresiei de sub integrală prin $N\cos^2 A$ şi exprimarea lui "M" în funcţie de $\sqrt{MN}\sqrt{\frac{M}{N}}$:

$$R_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{MN}\sqrt{\frac{M}{N}}\frac{dA}{\cos^2 A}}{1+\left(\sqrt{\frac{M}{N}}\right)^2 tg^2 A} \qquad (1.67)$$

Se notează :

$$\sqrt{\frac{M}{N}}tgA = t;\ 0 \le t \le \infty \ ;\ \text{pentru}\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \quad (1.68)$$

iar diferențiala acestei variabile cu:

$$dt = \sqrt{\frac{M}{N}}\frac{dA}{\cos^2 A} \quad (1.69)$$

Introducând (1.69) și (1.68) în (1.67) se obține:

$$R_m = \frac{2\sqrt{MN}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\left|arctg(t)\right|_0^{\infty} = = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}(\frac{\pi}{2}-0) = \sqrt{MN} \quad (1.70)$$

Exprimând razele principale de curbură "M" și "N" în funcție de raza polară și funcția auxiliară "V", date de (1.42) și (1.47), raza medie de curbură (1.70) devine:

$$R_m = \frac{c}{V^2} \quad (1.71)$$

Raza medie de curbură este funcție de latitudinea punctului în care se determină și variază de la ecuator la pol.

Astfel:

$$R_{0^0} = \frac{c}{1+e'^2\cos 0^0} = \frac{c}{1+\frac{e^2}{1-e^2}} = \frac{c}{\frac{1}{1-e^2}} = \frac{c}{\frac{a^2}{b^2}} = b \quad (1.72)$$

$$R_{90^0} = \frac{c}{1+e'^2\cos 90^0} = c = \frac{a^2}{b} \quad (1.73)$$

1.7.Lungimea arcului de meridian

Considerând egalitatea (1.35), se poate stabili lungimea arcului de meridian cuprinsă între două puncte "S_1" și "S_2" de latitudini "B_1" și "B_2", situate pe elipsoidul de referință:

$$S_{1-2} = \int_{S_1}^{S_2} ds = \int_{B_1}^{B_2} MdB \quad (1.74)$$

Introducând în (1.74) expresia razei mici de curbură se obține :

$$S_{1-2} = a\left(1-e^2\right)\int_{B_1}^{B_2}\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{-3/2} dB \quad (1.75)$$

Integrala obținută poate fi rezolvată, utilizând dezvoltările în serie ale expresiei de sub integrală.

Astfel:

$$\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{-3/2} = 1+(-1)(-\frac{3}{2})\frac{e^2\sin^2 B}{1!}+(-1)^2(-\frac{3}{2})(-\frac{3}{2}-1)\frac{e^4\sin^4 B}{2!}+ +(-1)^3(-\frac{3}{2})(-\frac{3}{2}-1)(-\frac{3}{2}-2)\frac{e^6\sin^6 B}{3!}+\ldots = = 1+\frac{3}{2}e^2\sin^2 B+\frac{15}{8}e^4\sin^4 B+\frac{105}{48}e^6\sin^6 B+\ldots \quad (1.76)$$

$$2\sin^2 B = 1-\cos 2B \Rightarrow \sin^2 B = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2B \qquad (1.77)$$

$$\sin^4 B = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2B\right)^2 = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2B+\frac{1}{8}\cos 4B \qquad (1.78)$$

$$\sin^6 B = \left(\sin^2 B\right)^3 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2B\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 +$$
$$+3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2B\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\cos 2B\right)^2 + \qquad (1.79)$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\cos 2B\right)^3 = \frac{5}{16}-\frac{15}{32}\cos 2B+\frac{3}{16}\cos 4B-\frac{1}{32}\cos 6B$$

Inlocuind relațiile (1.77), (1.78), (1.79) în relația(1.76) se obține:

$$\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{-3/2} = A'-B'\cos 2B+C'\cos 4B - -D'\cos 6B+E'\cos 8B... \qquad (1.80)$$

în care expresiile coeficienţiilor A' , B' ,...E'au fost calculate de Bagratunii (1962) şi sunt prezentate în cele ce urmează:

$$A' = 1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11025}{16384}e^8+...$$
$$B' = \frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\frac{2205}{2048}e^8+...$$
$$C' = \frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\frac{2205}{4096}e^8+...$$

$$D' = \frac{35}{512}e^6+\frac{315}{2048}e^8+...$$
$$E' = \frac{315}{16384}e^6+... \qquad (1.81)$$

În limita aproximaţiilor acceptate, integrala(1.75) devine:

$$S_{1-2} = a\left(1-e^2\right)\left(A'\frac{\left(B_2-B_1\right)^0}{\rho^0}-\frac{B'}{2}\left(\sin 2B_2-\sin 2B_1\right)+\right.$$
$$+\frac{C'}{4}\left(\sin 4B_2-\sin 4B_1\right)-\frac{D'}{6}\left(\sin 6B_2-\sin 6B_1\right)+ \qquad (1.82)$$
$$\left.+\frac{E'}{8}\left(\sin 8B_2-\sin 8B_1\right)\right)$$

Se înlocuiesc coeficienţii A' B'...E' cu noile valori date de produsul acestora cu parametri elipsoidului de referinţă , se obţin expresiile noilor coeficienţi:

$$P = a\left(1-e^2\right)A', Q = a\left(1-e^2\right)\frac{B'}{2}, R = a\left(1-e^2\right)\frac{C'}{4}$$
$$S = a\left(1-e^2\right)\frac{D'}{6}, T = a\left(1-e^2\right)\frac{E'}{8} \qquad (1.83)$$

Relaţia de calcul a lungimii arcului de meridian între punctele menţionate anterior va avea următoarea formă:

$$S_{1-2} = P\frac{(B_2 - B_1)^0}{\rho^0} - Q(\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + \\ + R(\sin 4B_2 - \sin 4B_1) - -S(\sin 6B_2 - \sin 6B_1) + \\ + T(\sin 8B_2 - \sin 8B_1) - ... \quad (1.84)$$

Observații:

- pentru necesitățile practice dezvoltările în serie se realizează până la termenul care conține e^8;
- în relația de calcul a coeficientului "P" nu a fost introdus factorul de transformare "ρ" întrucât valoarea acestuia variază de la grade sexagesimale la cele centezimale pentru grade, minute sau secunde și în acest caz implicit și coeficientul "P" ar lua valori diferite.

Pentru a calcula lungimea unui arc de meridian de la ecuator până la poziția unui punct de latitudine "B", în relația (1.83) se consideră B_1=0, iar B_2=B, astfel se obține:

$$S_{0-2} = P\frac{B^0}{\rho^0} - Q\sin 2B + C\sin 4B - D\sin 6B + E\sin 8B - ... (1.85)$$

Pentru elipsoidul Krasovski și W.G.S.84 valorile calculate ale coeficienților (1.81) sunt prezentate în tabelul 1.2, iar pentru coeficienții din relația (1.83) în tabelul 1.3.

Tabelul 1.2

Coeficienți	Krasovski	W.G.S.84
A'	1.005051773893630	1.005052501779130
B'	0.005062377645064	0.005063108582191
C'	0.000010585604075	0.000010588647947
D'	0.000000020808196	0.000000020817179
E'	0.000000000038591	0.000000000038613

Tabelul 1.3

Coeficienți	Krasovski [m]	WGS.84 [m]
P	6367558.496817900	6367449.145766540
Q	16036.480221834	16038.508614987
R	16.766413165	16.770934156
S	0.021971904	0.021980996
T	0.000030562	0.000030579

Atunci când, la calculul coeficientului "P" se ține seama de factorul de transformare "ρ", de la grade, minute sau secunde la radiani, valorile acestui coeficient sunt prezentate în tabelele 1.4 și 1.5.Valorile celorlalți coeficienți se regăsesc în tabelul 1.3.

Tabelul 1.4

Coeficient	Krasovski [m]	WGS.84 [m]
P^0	111134.861082813	111132.952546927
P'	1852.247684714	1852.215875782
P''	30.870794745	30.870264596

Tabelul 1.5

Coeficient	Krasovski [m]	WGS.84 [m]
P^g	100021.374974532	100019.657292234
P^c	1000.213749745	1000.196572922
P^{cc}	10.002137497	10.001965729

1.8. Lungimea arcului de paralel

Pe o paralelă de rază "r" şi de latitudine "B" se consideră punctul "P_1"de longitudine "L" şi punctul"P_2" de longitudine L+dL , (fig.11). În această situaţie, longitudinea arcului elementar de paralel va fi dată relaţia :

$$dl=rdL \tag{1.86}$$

Atunci când, punctele "P_1" şi "P_2" se află la o distanţă finită, longitudinile lor fiind "L_1" şi "L_2" se poate stabili lungimea arcului de paralel integrând egalitatea (1.86), respectiv :

$$l_{1-2}=r\int_{l_1}^{l_2} dL=\frac{r\left(L_2-L_1\right)^0}{\rho^0} \tag{1.87}$$

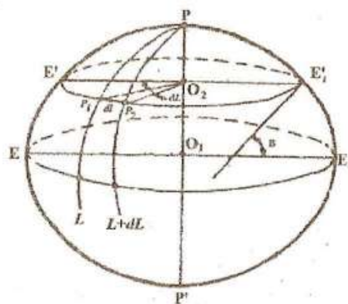


Fig.1.11 Lungimea arcului de paralel

1.9.Secţiuni normale pe elipsoid

Considerăm două puncte oarecare "S_1" şi "S_2" pe suprafaţa elipsoidului de referinţă de latitudini şi longitudini diferite (fig.1.12).

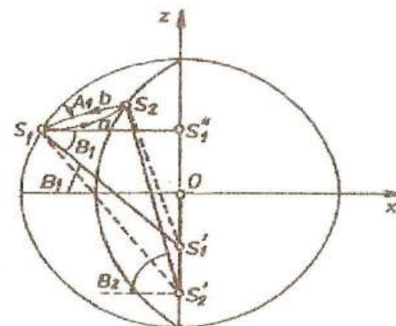


Fig.1.12 Secţiuni normale pe elipsoid

Normala în punctul "S_1" împreună cu punctul "S_2" determină un plan normal la suprafaţa elipsoidului, pe care o intersectează după linia S_1aS_2, numită secţiune normală directă în punctul "S_1".

Normala în punctul "S_2" împreună cu punctul "S_1" determină un plan normal la suprafaţa elipsoidului pe care o intersectează după linia S_2bS_1, numită secţiune normală directă în punctul "S_2".

Secţiunea normală directă "S_1" este secţiunea inversă faţă de punctul "S_2" şi de asemenea secţiunea normală directă din "S_2" este secţiune inversă faţă de punctul "S1".

În general secţiunile normale din punctele "S_1" şi "S_2" se numesc ***secţiuni normale reciproce***.

Secțiunile normale reciproce sunt realizate concret în cazul observațiilor geodezice unghiulare.

Dacă admitem că, axa verticală a aparatului staționat în punctul "S_1" coincide cu normala acestui punct, atunci linia de observație din "S_1" către "S_2" se află în planul normal care determină secțiunea normală directă. În consecință, corespunzător acestei linii de observație pe suprafața elipsoidului rezultă secțiunea normală directă din "S_1".

În același mod, pentru linia de observație realizată din "S_2" către "S_1",avem pe suprafața elipsoidului secțiunea normală directă din "S_2".

Un caz particular a secțiunilor normale reciproce este atunci când cele două secțiuni coincid și acest lucru se întâmplă când punctele de viză sunt situate pe același meridian sau pe același paralel.

Dar, considerând cazul general și admițând că pe suprafața elipsoidului de referință există trei puncte de latitudini și longitudini diferite , prezența secțiunilor normale reciproce conduce la concluzii importante din punct de vedere geodezic.

Fie aceste puncte notate cu "S_1", "S_2", și "S_3". (fig.1.13) .

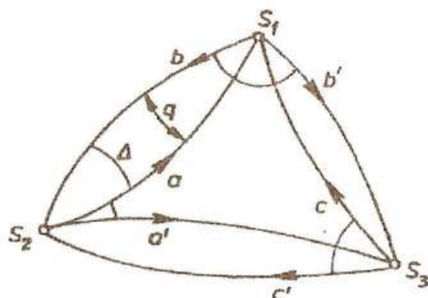


Fig.1.13.Secțiuni normale

Punctele considerate determină în principiu un triunghi pe suprafața elipsoidului.

Măsurătorile geodezice efectuate în punctele de vârf ale triunghiului conduc la obținerea unghiurilor "α", "β", "γ" care sunt definite de secțiunile normale directe. Este simplu de observat că aceste unghiuri nu aparțin unui triunghi bine definit.

Din această cauză se impune a fi înlocuite secțiunile normale reciproce cu linii unice .

Aceste linii, evident că vor conduce la obținerea unui triunghi bine definit .

Geometric, ele sunt linii geodezice ale căror proprietăți și poziție față de secțiunile reciproce urmează a fi tratate în continuare.

1.10.Linia geodezică

Fără a analiza din punct de vedere matematic linia geodezică sunt necesare totuși câteva precizări de ordin geometric legate de aceasta.

Linia geodezică între două puncte situate pe suprafața elipsoidului reprezintă o curbă unică și de lungime minimă.

Dacă suprafața Pământului se consideră o sferă, arcele de cerc mari sunt linii geodezice, iar dacă suprafața se consideră plană pe anumite porțiuni, liniile geodezice sunt linii drepte .

De menționat că cercurile mari se obțin prin intersecția sferei cu un plan normal ce trece prin centru sferei, sau prin cei doi poli.

Poziția liniei geodezice față de secțiunile normale reciproce este bine definită în sensul că este mai apropiată de

secțiunea normală directă și mai depărtată de secțiunea normală inversă.

Liniile geodezice nu au echivalent în cadrul operațiilor geodezice de teren, ci intervin doar în procesele de calcul.

Pe direcța meridianelor secțiunile normale reciproce coincid cu linia geodezică.

Este de reținut și faptul că paralelele nu reprezintă linii geodezice.

1.10.1.Poziția liniei geodezice față de secțiunile normale reciproce

În măsurătorile geodezice, așa cum s-a arătat, este necesară trecerea de la secțiunile normale la linia geodezică. Pentru aceasta trebuie stabilită poziția liniei geodezice față de secțiunile normale.

Pentru rețelele de triangulație de ordinul I (maximum 60 km) liniile geodezice diferă față de secțiunile normale reciproce atât azimutal și ca lungime . Dacă diferența de lungime nu se ia în considerare, fiind foarte mică, diferența de azimut trebuie luată în considerare, chiar dacă este foarte mică.

În acest sens, s-a stabilit că linia geodezică împarte unghiul dintre secțiunile reciproce în raportul de 1/2, fiind mai apropiată de secțiunea normală directă.

Deci , dacă în punctul "A" (fig.1.14) unghiul format de secțiunile normale este "Δ" atunci, unghiul format de linia geodezică cu secțiunea normală directă este $\delta_1 = \frac{\Delta}{3}$, iar unghiul format de linia geodezică cu secțiunea normală inversă este $\delta_2 = \frac{2\Delta}{3}$.Situația este similară în punctul "B".

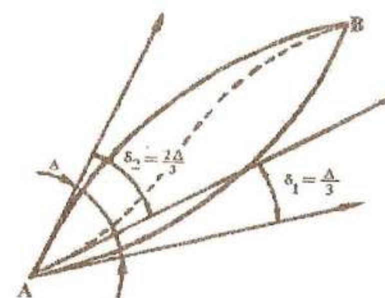


Fig.1.14.Linia geodezică

După Jordan W.ș.a. 1958 și Bagratunii G.V. 1962 (citați de Dragomir V. [10]), unghiul format de secțiunile normale reciproce"Δ" se calculează cu relația:

$$\Delta^{cc} = \rho^{cc} \frac{s_1^2 \eta_m^2}{4N_m^2} \sin 2A_1 \qquad (1.88)$$

în care :

s_1 – lungimea liniei geodezice;

N_m – raza mare de curbură calculată pentru latitudinea medie a liniei geodezice;

η_m – $e'^2 \cos B_m$;

A_1 –azimutul liniei geodezice.

Din relația (1.88) rezultă: pentru $A_1=0^g$ și respectiv $A_1=100^g$, $\Delta=0$, ceea ce confirmă afirmațiile anterioare că pe direcția meridianelor și paralelelor secțiunile normale reciproce coincid.Valorile maxime pentru Δ se obțin când $A_1=50^g$, însă și în aceste caz valorile sunt foarte mici.

Pentru exemplificare, se prezintă valorile lui Δ și Δ/3 pentru lungimile laturilor medii ale rețelei de triangulație pentru $B_m=46^0$ și $A_1=50^g$ (tab.1.6).

Tabelul 1.6

S (km)	Δ [cc]	Δ/3 Δ [cc]
2	0.000051	0.000017
4	0.000203	0.000068
7	0.000621	0.000207
15	0.002852	0.000951
25	0.007923	0.002641
30	0.011409	0.003803
100	0.126771	0.042257

1.10.2. Corecția de reducere la linia geodezică

Corecția de reducere la linia geodezică se aplică pentru a efectua trecerea de la secțiunea normală directă, prin care se reprezintă linia de observație pe suprafața elipsoidului, la linia geodezică.

O linie de observație realizată între două puncte situate pe suprafața terestră se reprezintă pe suprafața elipsoidului prin secțiunea normală AB. Azimutul acestei linii este "A_m" și rezultă din măsurători.

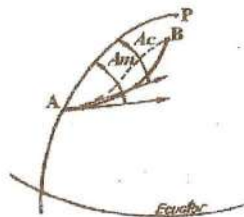


Fig. 1.15. Azimutul liniei geodezice

Azimutul liniei geodezice fiind "A_C", este necesar a fi corectat azimutul secțiunii normale directe cu o corecție "C_1", numită corecție de reducere la linia geodezică, astfel încât:

$$A_C = A_m - C_1 \tag{1.89}$$

Expresia de calcul a corecției "C_1" a fost demonstrată în [12] în funcție de azimutul secțiunii normale directe calculat din coordonatele ecuației parametrice Puiseaux-Weingarteh-Gauss ale liniei geodezice pe elipsoidul de referință, prin dezvoltări în serie:

$$C_1^{cc} = \frac{e^2 s^2 \rho^{cc}}{12 R_m^2} \cos^2 B_m \sin 2A_m \tag{1.90}$$

în care :

e – prima excentricitate;
s – distanța între punctele "S_1" și "S_2", în km ;
B_m – latitudinea medie ;
R_m – raza medie pentru latitudinea medie.

Corecția de reducere la linia geodezică trebuie luată în calcul numai în cazul triangulațiilor de ordinul I (când distanțele sunt de mărimea 20 – 60 km).

O expresie de calcul mai precisă a fost stabilită de Jordan 1958:

$$C_1^{cc} = \rho^{cc}\left(\frac{s_1^2 \eta_m^2}{12 N_m^2}\sin 2A_1 - \frac{s_1^3 \eta_m^2}{24 N_m^3} t \sin A\right) \tag{1.91}$$

unde: $t = \text{tg}B$
$\eta_m = e' \cos B_m$

1.11. Reducerea observaţiilor geodezice pe suprafaţa elipsoidului de referinţă

Este foarte important de reţinut că înainte de a fi folosite în calcule, observaţiile geodezice se reduc la suprafaţa elipsoidului de referinţă.

Această operaţie este necesară întrucât observaţiile de teren sunt raportate la verticala pe geoid, dată de poziţia firului cu plumb, în timp ce calculele se efectuează pe elipsoid după ce observaţiile instrumentale au fost proiectate pe elipsoidul de referinţă, după normala la acesta.

Pentru calculul corecţiilor de reducere pe elipsoid a observaţiilor geodezice este necesară determinarea prealabilă a ondulaţiilor geoidului „N" şi a componentelor deviaţiei verticalei ξ,η.

Aducerea reţelelor geodezice de sprijin, existente pe suprafaţa fizică a Pământului, pe suprafaţa elipsoidului de referinţă se poate realiza după mai multe metode, dintre care se vor menţiona cele mai importante.

Metoda desfăşurării. Elementele măsurate pe suprafaţa fizică a Pământului se reduc la suprafaţa geoidului (la nivelul mării) urmând să fie supuse unei compensări, în funcţie de geometria reţelei de triangulaţie.

Pentru calcule se alege un ***punct fundamental***, în care se consideră că elipsoidul de referinţă este tangent la geoid. De asemenea, se acceptă identitatea dintre coordonatele astronomice şi cele geodezice, precum şi coincidenţa normalei la elipsoid cu verticala la geoid.

Rezultă astfel *datele iniţiale ale triangulaţiei*: coordonatele geodezice ale punctului fundamental, lungimea şi azimutul unei laturi care uneşte acest punct cu un punct oarecare al reţelei de triangulaţie. Calculele se efectuează în

continuare prin desfăşurare; pornind din punctul fundament[al] se determină coordonatele tuturor punctelor reţelei, folosindu-se elementele reduse la suprafaţa geoidului, fără a se ma[i] realiza trecerea lor la suprafaţa elipsoidului de referinţă.

Metoda desfăşurării introduce erori sistematice d[e] calcul, care se măresc pe măsura îndepărtării de punctu[l] fundamental şi, ca urmare, poate fi utilizată numai pentru teritorii relativ mici, pentru care se poate admite că elipsoidul de referinţă înfăşoară optim suprafaţa geoidului. In acest mod s-a calculat triangulaţia primordială de ordinul I din ţara noastră, dinaintea celui de-al doilea război mondial, pe elipsoidul internaţional *Hayford*. Punctul fundamental s-a considerat în observatorul astronomic militar din *Dealul Piscului* cu viză de orientare *spre Foişorul de foc*.

Metoda proiectării- constă în aducerea elementelor măsurate(unghiuri, direcţii, lungimi ş.a.) pe suprafaţa elipsoidului de referinţă, prin aplicarea unor corecţii. In cadrul metodei proiectării se cunosc variantele Pizzetti şi Bruns-Helmert.

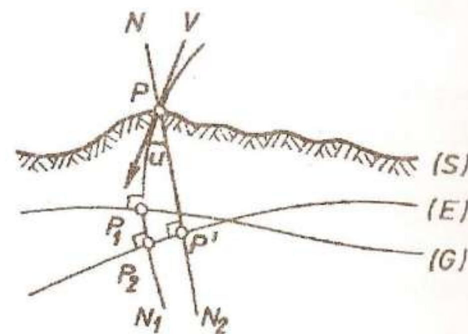


Fig.1.16 Metode de proiectare a observaţiilor pe elipsoid

elipsoidului de referință, iar punctul "S_2" pe o suprafață de nivel oarecare (fig.1.17).

În această situație punctul "S_2" va avea o înălțime "H" față de punctul "S_1".

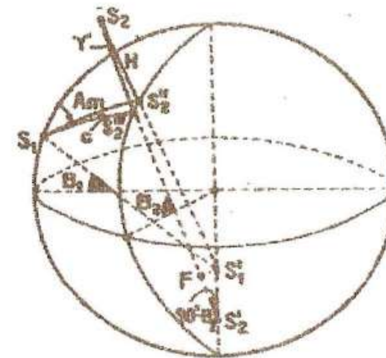


Fig.1.17.Corecția de altitudine

Proiecția punctului "S_2" pe suprafața elipsoidului, se face cu ajutorul normalei la această suprafață. Normala din "S_2" la elipsoid determină punctul "S_2''".

Măsurând azimutul direcției S_1 S_2, obținem unghiul pe care-l face secțiunea normală directă S_1S_2'' cu meridianul punctului "S_1".

În consecință, se măsoară "A_m" și trebuie determinat "A_c". Trecerea de la azimutul "A_m" la azimutul "A_c" se face introducând o corecție "C_2", numită corecția datorită înălțimii punctului vizat, relația utilizată fiind :

$$A_c = A_m + C_2 \tag{1.92}$$

Pentru calculul valorii corecției "C_2" a fost stabilită

relația:

$$C_2^{cc} = \frac{He^2\rho^{cc}}{2M_2}\cos^2 B_2 \sin 2A_m \qquad (1.93)$$

în care :

H – înălțimea punctului "B" în Km;

M_2 – raza mică de curbură în punctul "S_2", de latitudine "B_2";

Corecția datorită înălțimii punctului vizat are importanță practică numai pentru cazurile în care $H \geq 20$ m.

1.11.1.2.Corecția datorată deviației verticalei

Intrucât instrumentele topografice se poziționează, în procesul de măsurare, după verticala locului, iar procesele de calcul se execută pe elipsoid, după ce în prealabil măsurătorile au fost proiectate pe acesta, corecția datorată abaterii de la verticală apare ca necesară prin aceea că într-un punct oarecare situat pe suprafața terestră verticala locului nu coincide cu normala la elipsoidul de referință.

Fie în acest sens punctul "S_1" (fig.1.18.a) în care sunt cunoscute coordonatele geografice elipsoidale "B" și „L" și coordonatele astronomice „Φ" și „Λ".

Sunt notate de asemenea azimutul geodezic cu "A" către un alt punct "S_2" și azimutul astronomic α către același punct.

Construim o sferă auxiliară cu raza egală cu unitatea, suprafața căreia va fi intersectată de normala la elipsoid în punctul "Z_g" și de verticala punctului "A" în "Z_a'".

O paralelă la axa de rotație a Pământului ,determină pe

sfera auxiliară punctul "P", iar direcția S_1S_2 punctul S_2'.

Este cunoscut că normala la elipsoid în punctul "S_1" determină față de planul ecuatorului unghiul de latitudine geodezică "B". Același lucru în cazul verticalei din punctul "S_1",planul ecuatorului determină unghiul de latitudine astronomică "Φ". Unghiurile "B" și „Φ" le găsim și pe sfera auxiliară.Pe sfera auxiliară se mai găsesc unghiul zenital aparent Z^0 și corespondentul acestuia unghiul zenital redus la normala la elipsoid "Z^E". Cunoscând longitudinile în punctele "Z_g" și "Z_a'" situate pe sferă, unghiul din "P" va fi Λ – L.

Fig.1.18.Abaterea de la verticală

Față de direcția nordului proiectat prin "P", direcția S_1S_2 va avea azimutul geodezic "A" și azimutul astronomic "α".

Se proiectează punctul "Z_a" pe direcția Z_gP și se obține punctul z'. Catetele triunghiului sferic $Z_g Z' Z_a$ notate cu "ξ „și „η" se numesc componentele abaterii de la verticală "u".

Unde: "η" și "ξ" se obțin rezolvând triunghiul geodezic $P Z' Z_a$ după cum urmează:

$$\frac{\sin\eta}{\sin(\Lambda - L)} = \frac{\sin(90^0 - \Phi)}{\sin 90^0} \quad (1.94)$$

sau:

$$\frac{\sin\eta}{\sin(\Lambda - L)} = \frac{\cos\Phi}{1} \quad (1.95)$$

Deoarece termenii din membrul stâng al relației (1.95) sunt foarte mici se asimilează funcția cu valoarea argumentului, rezultând:

$$\eta = (\Lambda - L)\cos\Phi \quad (1.96)$$

Componenta "ξ" se determină în același triunghi sferic transformat după regula lui Neper.Aceasta constă în înlocuirea laturilor adiacente unghiului drept "A" prin complementele lor 90^0-b, 90^0-c, după care, cosinusul fiecărui element este egal cu produsul elementelor neadiacente sau cu produsul cotangentelor adiacente.Triunghiul transformat este prezentat în fig.1.18.b, pe baza căruia rezultă:

$$\cos(\Lambda - L) = ctg(90^0 - \Phi)ctg(B + \xi) \quad (1.97)$$

Datorită valorii mici a diferenței dintre latitudinea astronomică "Λ" și cea geodezică "L" se aproximează cosinusul acestei diferențe cu "1", astfel se poate scrie:

$$tg(B + \xi) = tg\Phi \quad (1.98)$$

sau:

$$\xi = \Phi - B \quad (1.99)$$

Corecția datorită abaterii de la verticală "C_3", ce se aplică măsurătorilor azimutale, se calculează în funcție de componentele "ξ" și "η", de azimutul geodezic "A" și de unghiul zenital aparent "Z^0" și rezultă dintr-o componentă corectivă de reducere a azimutelor astronomice:

$$C_3^{cc} = \left(\eta^{cc}\cos A - \xi^{cc}\sin A\right)ctgZ^0 \quad (1.100)$$

Unghiul zenital din (1.100) se calculează cu relația:

$$Z^0 = arc\ ctg(\frac{\Delta H}{D}) \quad (1.101)$$

unde:

-ΔH -diferența de nivel se calculează prin nivelment geometric sau trigonometric (pentru lungimi de până la 4km).

Comparativ cu celelalte două corecții examinate anterior, corecția datorită deviației verticalei este mai semnificativă și deci este justificată aplicarea ei.

1.11.2.Reducerea determinărilor astronomice pe elipsoidul de referință

Reducerea determinărilor astronomice se referă la reducerea coordonatelor și azimutelor astronomice.

1.11.2.1.Reducerea coordonatelor astronomice

Cunoscând componentele astronomo – geodezice ale deviației verticalei, prezentate în §1.11.1.2, se pot calcula coordonatele geodezice pe suprafața elipsoidului, din relațiile (1.99) și (1.96):

$$B = \Phi - \xi \qquad (1.102)$$

$$L = \Lambda - \eta \sec \Phi \qquad (1.103)$$

Intrucât coordonatele astronomice sunt determinate cu erori de poziţie mult mai mari decât erorile impuse coordonatelor geodezice, relaţiile (1.102) şi (1.103) sunt utilizate numai pentru controlul unor puncte amplasate la distanţe de ordinul sutelor de kilometri.

Pentru reducerea observaţiilor astronomice la suprafaţa geoidului, Heiskanen şi Moritz (1967), utilizează relaţiile:

$$\begin{aligned} \Phi_{geoid} &= \Phi - 0.171 H_{km} \sin 2B \\ \Lambda_{geoid} &= \Lambda \end{aligned} \qquad (1.104)$$

unde:

H_{km}-altitudinea aproximativă a punctului considerat, în km.

1.11.2.2.Reducerea azimutelor astronomice

Pentru a reduce azimutul astronomic "α" la azimutul geodezic "A" în fig.1.18.a, se observă că:

$$\begin{aligned} A &= \beta + R \\ \alpha &= \beta_1 + R_1 \end{aligned} \qquad (1.104)$$

Astfel se poate scrie:

$$A = \alpha - (\beta_1 - \beta) - (R_1 - R) = \alpha + (\beta - \beta_1) + (R - R_1) \quad (1.105)$$

Pentru a determina $(\beta - \beta_1)$ în funcţie de elementele cunoscute, în triunghiul sferic $Z_g P Z_a$, se aplică formula cosinusului unghiului:

$$\cos\beta = \cos(180 - \beta_1)\cos(\Lambda - L) + \sin(180 - \beta_1)\sin(\Lambda - L)\cos(90^0 - \Phi) \quad (1.106)$$

Tinând cont de funcţiile complementare şi suplimentare, în limita aproximaţiilor admisibile, relaţia (1.106) devine:

$$\beta - \beta_1 = -(\Lambda - L)\sin\Phi = -\eta tg\Phi \qquad (1.107)$$

In mod analog în triunghiul $Z_g Z_a S'_2$ se poate scrie:

$$\cos R = \cos(180 - R_1)\cos q + \sin(180 - R_1)\sin q \cos Z^0 \qquad (1.108)$$

de unde :

$$R - R_1 = -\sin q \cos Z^0 \qquad (1.109)$$

Mărimea unghiului "q" se determină din acelaşi triunghi sferic prin aplicarea formulei sinusului:

$$\frac{\sin q}{\sin u} = \frac{\sin R}{\sin Z^0} \Rightarrow \sin q = \frac{u \sin R}{\sin Z^0} \qquad (1.110)$$

Inlocuind (1.110) în (1.109)şi exprimând pe "u" în funcţie de componentele deviaţiei verticalei "ξ" şi "η" se obţine:

$$R - R_1 = (\eta \cos A - \xi \sin A) ctg Z^0 \qquad (1.111)$$

Inlocuind relațiile (1.107) și (1.111) în (1.105) se obține azimutul geodezic în funcție de azimutul astronomic:

$$A = \alpha - (\Lambda - L)\sin\Phi + (\eta\cos A - \xi\sin A)ctg\, Z^0 \qquad (1.112)$$

Intrucât diferențele de nivel, dintre punctele în care se determină lungimea unei baze și azimutul astronomic al acesteia, sunt mici, în relația (1.112) $Z^0 \to 90^0, iar\ ctgZ^0 \approx 0$. In aceste condiții (1.112) devine:

$$A = \alpha - (\Lambda - L)\sin\Phi = \alpha - \eta tg\Phi \qquad (1.113)$$

Relația (1.113) se utilizează în rețelele de ordin superior și este cunoscută sub denumirea de ecuația Laplace.

1.11.3. Reducerea observațiilor zenitale la normala la elipsoid

Este cunoscut faptul că în rețelele geodezice de sprijin, elementele de planimetrie (*X, Y* sau *B, L*) au ca suprafață de referință planul de proiecție sau elipsoidul de referință, iar elementele de altimetrie au ca suprafață de referință geoidul sau cvasigeoidul. Astfel, reducerea observațiilor zenitale la normala la elipsoid nu mai are sens.

Reducerea observțiilor zenitale la normala la elipsoid este necesară numai în cazul operațiilor efectuate în geodezia tridimensională, unde toate cele trei coordonate (X, Y, H^E sau B, L, H^E) se exprimă în raport de suprafața elipsoidului de referință.

In figura 1.19 se remarcă faptul ,că datorită refracției

atmosferice, în teren nu se măsoară unghiurile zenitale „z_1" și „z_2",ci unghiurile zenitale aparente z_1^0, z_2^0, astfel:

$$z_1 = z_1^0 + \rho_1; \quad z_2 = z_2^0 + \rho_2 \qquad (1.114)$$

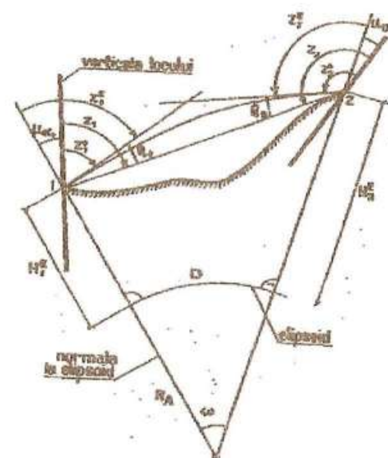


Fig.1.19.Reducerea unghiurilor zenitale la normala la elipsoid

Pentru distanțe până la 6 km se poate aproxima curba de refracție printr-un arc de cerc și, ca urmare, se acceptă egalitatea unghiurilor de refracție $\rho_1 \approx \rho_2$.

Din fig. 1.19 se observă, că legătura dintre unghiurile zenitale măsurate și cele reduse la normala la elipsoid este dată de relațiile :

$$z_1^E = z_1^0 + u_{\alpha_1}; \quad z_2^E = z_2^0 + u_{\alpha_2} \qquad (1.115)$$

Unghiurile „$u_{\alpha 1}$" şi „$u_{\alpha 2}$" reprezintă *componentele deviaţiei verticalei pe direcţia 1—2,* de azimut „α", determinate în punctele 1 şi 2.

Exprimând deviaţia verticalei în funcţie de componentele "ξ", "η" şi azimutul direcţiei se obţine:

$$u_\alpha = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha \qquad (1.116)$$

Inlocuind (1.115) în (1.114) rezultă:

$$\begin{aligned} z_1^E &= z_1^0 + \xi_1 \cos\alpha + \eta_1 \sin\alpha; \\ z_2^E &= z_2^0 + \xi_2 \cos\alpha + \eta_2 \sin\alpha \end{aligned} \qquad (1.117)$$

Unghiurile zenitale reduse la normala la elipsoid se utilizează la calculul nivelmentului geodezic simultan şi reciproc [11], astfel:

$$\Delta H_{12}^E = H_2^E - H_1^E = D\left(1 + \frac{H_m}{R_A}\right) tg\frac{z_2^E - z_1^E}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} + \frac{S_2 - S_1}{2} \qquad (1.118)$$

în care:

$$H_m = \frac{H_1 + H_2}{2} \qquad (1.119)$$

H_1 şi H_2 -altitudinile aproximative ale punctelor 1 şi 2 care se pot extrage de pe hartă;

R_A-raza secţiunii normale de azimut "A",pentru latitudinea medie "B_m' a celor două puncte;

I_i şi S_i – înălţimea instrumentului şi semnalului în punctul "i".

In cazul nivelmentului trigonometric unilateral nu se

justifică reducerea unghiurilor zenitale la normala la elipsoid întrucât erorile de refracţie sunt mult mai mari faţă de corecţiile de reducere la normala la elipsoid.

1.11.4.Reducerea distanţelor pe elipsoid

In funcţie de categoria aparatelor utilizate, măsurarea laturilor (bazelor) necesare în prelucrarea reţelelor geodezice se realizează în mod diferit :

- cu ajutorul firului de invar;
- cu ajutorul aparatelor electronice.

In funcţie de acestea şi reducerea distanţelor pe suprafaţa de referinţă ,se va face în mod diferit.

1.11.4.1.Reducerea bazelor geodezice măsurate cu firul de invar

Lungimea bazei geodezice d^o, măsurată cu firul de invar şi prelucrată în prealabil după metodologia cunoscută [11], se reduce la o suprafaţă de nivel medie, situată la altitudinea „H_m":

$$H_m = \frac{H_1 + H_2}{2} \qquad (1.120)$$

unde : H_1 şi H_2 sînt altitudinile capetelor bazei.

Pentru reducerea, în continuare, a bazei la elipsoid se poate proceda astfel :

1) Se reduce, pentru început, distanţa d° la o suprafaţă paralelă

cu elipsoidul, situată la altitudinea elipsoidică H_m^E

$$H_m^E = \frac{H_1^E + H_2^E}{2} \qquad (1.121)$$

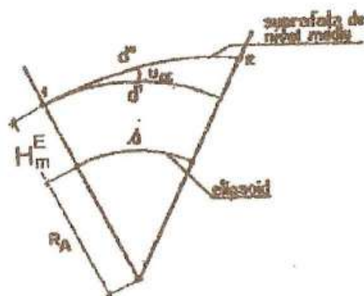


Fig.1.20.Reducerea bazelor la elipsoid

In limita aproximaţiilor admisibile se poate înlocui suprafaţa elipsoidului cu suprafaţa sferică de rază "R_A", care se calculează cu relaţia (1.58), la latitudinea medie a capetelor bazei. Din fig.1.20 rezultă :

$$d' = d^0 \cos u_\alpha \qquad (1.122)$$

unde:

$$u_\alpha = \xi_m \cos\alpha + \eta_m \sin\alpha \qquad (1.123)$$

$$\xi_m = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}; \quad \eta_m = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \qquad (1.124)$$

2) Se calculează baza redusă la nivelul elipsoidului din relaţia:

$$\frac{s}{R_A} = \frac{d'}{R_A + H_m^E} \qquad (1.125)$$

de unde:

$$s = d'\frac{R_A}{R_A + H_m^E} = d'\frac{R_A + H_m^E - H_m^E}{R_A + H_m^E} \approx d'(1 - \frac{H_m^E}{R_A}) \qquad (1.126)$$

Prin dezvoltarea în serie a relaţiei de mai sus rezultă:

$$s = d'(1 - \frac{H_m^E}{R_A} + \left(\frac{H_m^E}{R_A}\right) - ...) \qquad (1.127)$$

Altitudinile elipsoidice ale capetelor bazei se calculează în funcţie de cotele ortometrice şi ondulaţiile geoidului .

Pentru reducerea riguroasă a bazelor măsurate cu firul de invar, la suprafaţa elipsoidului de referinţă, sunt necesare componentele deviaţiei verticalei şi ondulaţiile geoidului în punctele de capăt ale bazei.

1.11.4.2 Reducerea laturilor măsurate cu aparate electronice

Laturile măsurate cu ajutorul aparatelor electronice de tipul staţiilor totale, telurometrelor etc, sunt prelucrate de asemenea în prealabil, prin aplicarea aşa numitelor *corecţii fizice*. Distanţa D° rezultată după această operaţie este situată la nivelul celor două puncte, între care s-a efectuat măsurătoarea (fig. 1.21). Rezultă că este necesară cunoaşterea altitudinilor elipsoidice $H_1^E si\ H_1^E$, şi prin urmare, a ondulaţiilor geoidului în aceste puncte.

In figura 1.21.se aplică ecuaţia lui Pitagora generalizată rezultând:

$$(D^0)^2 = (R_A + H_1^E)^2 + (R_A + H_2^E)^2 - \\ -2(R_A + H_1^E)(R_A + H_2^E)\cos\omega \qquad (1.128)$$

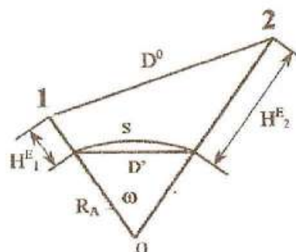


Fig.1.21.Reducerea distanțelor măsurate cu aparate electronice

Dezvoltând relația (1.128) și introducând notațiile:

$$\cos\omega = 1 - 2\sin^2\frac{\omega}{2}; \quad D' = 2R_A \sin\frac{\omega}{2}; \quad \Delta H_{12}^E = H_2^E - H_1^E \qquad (1.129)$$

se obține:

$$(D^0)^2 = R_A^2 + 2R_A H_1^E + (H_1^E)^2 + R_A^2 + 2R_A H_2^E + (H_2^E)^2 - \\ -2(R_A + H_1^E)(R_A + H_2^E) + 4R_A^2(1 + \frac{H_1^E}{R_A})(R_A + \frac{H_2^E}{R_A})\sin^2\frac{\omega}{2} =$$

$$= (H_1^E)^2 - 2H_1^E H_2^E + (H_2^E)^2 + (1 + \frac{H_1^E}{R_A})(R_A + \frac{H_2^E}{R_A})(D')^2 = \\ = (\Delta H_{12}^E)^2 + (1 + \frac{H_1^E}{R_A})(R_A + \frac{H_2^E}{R_A})(D')^2 \qquad (1.130)$$

Din relația (1.130) rezultă lungimea corzii D':

$$D' = \sqrt{\frac{(D_0)^2 - (\Delta H_{12}^E)^2}{\left(1 + \frac{H_1^E}{R_A}\right)\left(1 + \frac{H_2^E}{R_A}\right)}} \qquad (1.131)$$

Lungimea arcului "s" care reprezintă lungimea laturii măsurate redusă la suprafața elipsoidului se obține cu formula:

$$s = R_A\omega = 2R_A\frac{\omega}{2} = 2R_A arc\sin\frac{D'}{2R_A} \qquad (1.132)$$

Din formulele (1.131) și (1.132) se observă că nu este necesară cunoașterea deviațiilor verticalelor în punctele 1 și2, așa cum a fost în cazul reducerii bazelor măsurate cu firul de invar, dar pentru determinarea cotelor elipsoidale sunt necesare ondulațiile geoidului în aceste puncte.

1.11.5. Corecția de centrare și reducere

Datorită unor imperfecțiuni inerente de construcție a semnalelor geodezice, precum și datorită influenței unor factori aleatori, observațiile unghiulare reduse la suprafața elipsoidului

trebuie *centrate,* prin aplicarea unor corecţii corespunzătoare, în cadrul *tuturor* reţelelor de triangulaţie (indiferent de ordinul sau mărimea reţelei).

In punctul de triangulaţie „*P*" (fig.1.22) se consideră rezultatul obţinut pe foaia de centrare –reducere şi se acceptă că între acest punct şi punctul de triangulaţie „P_1" există o legătură reciprocă.

Se notează cu „*M*" direcţiile măsurate pe pilastrul „*I*" al punctului „*P*" şi reduse, în prealabil, pe direcţia de referinţă „*R*", în raport cu care s-au determinat elementele de centrare.

Deoarece borna „*C*" şi pilastrul „*I*" nu se află pe aceeaşi verticală, în loc să se măsoare direcţia „α" s-a măsurat direcţia „*M*". Se observă că:

$$\alpha = M + c \qquad (1.133)$$

In relaţia (1.133) termenul „*c*" se numeşte *corecţie de centrare,* care se calculează din triunghiul CP_1I prin aplicarea teoremei sinusului:

$$\frac{\sin c}{l} = \frac{\sin(\theta + M)}{D} \qquad (1.134)$$

unde:

D- distanţa PP_1, cunoscută din calculele preliminare;

l – excentricitatea pilastrului faţă de bornă;

θ – unghiul măsurat pe foaia de centrare.

Având în vedere că excentricitatea „l" este infinit mică faţă de distanţa dintre puncte, din (1.134) rezultă:

$$c^{cc} = \rho^{cc} \frac{l \sin(\theta + M)}{D} \qquad (1.135)$$

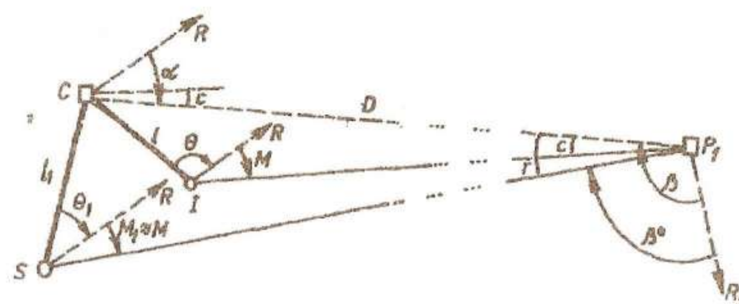


Fig.1.22. Corecţia de centrare şi reducere

Cu elementele foii de centrare determinate în punctul „P" se determină elementele de reducere din punctul „P_1". Astfel datorită excentricităţii semnalului „S" faţă de borna „C" în loc să se măsoare unghiul „β" în punctul „P_1",faţă de direcţia de referinţă „R_1" se măsoară unghiul β^0.Valoarea măsurată va trebui corectată cu o corecţie „r" denumită corecţia de reducere.

$$\beta = \beta^0 + r \qquad (1.136)$$

Corecţia „r" se determină din triunghiul CP_1S prin aplicarea teoremei sinusului de unde rezultă:

$$r^{cc} = \rho^{cc} \frac{l_1 \sin(\theta_1 + M)}{D} \qquad (1.137)$$

unde :

l_1- excentricitatea semnalului faţă de bornă;

θ_1- unghi măsurat pe foaia de centrare conform fig.1.22.

Aproximarea $M \approx M_1$, nu introduce erori superioare faţă de valoarea unghiurilor θ şi θ_1.

2.REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR GEODEZICE PE SUPRAFAȚA ELIPSOIDULUI DE REFERINȚĂ

Rezolvarea triunghiurilor, situate pe suprafața terestră numite și triunghiuri geodezice, poate fi realizată prin trecerea de la triunghiuri geodezice elipsoidale la triunghiuri geodezice sferice.

Această trecere este posibilă la triunghiuri mici , adică în situații în care suprafața elipsoidală de referință este aplicabilă pe o sferă de rază medie "R_m" calculată în centrul de greutate al triunghiului .

Se demonstrează că, sub 60 km, lungimea laturilor, triunghiurilor geodezice elipsoidale este egală cu cea a triunghiurilor sferice, cu aproximație de 1 mm.

A rezolva un triunghi geodezic sferic înseamnă, a determina două laturi în situația în care sunt cunoscute celelalte elemente ale triunghiului, o latură și cele trei unghiuri .

Datorită faptului că excesele sferice ale triunghiurilor geodezice sferice sunt mici, nu este necesar și nici comod să facem rezolvarea lor după formulele trigonometriei sferice , ci această rezolvare se face mai simplu, folosindu-se două metode:

- metoda Legendre;
- metoda Soldner (aditamentelor).

Intrucât în ambele metode intervine în calcul, ***excesul sferic*** se prezentă în continuare expresiile de calcul ale acestuia.

2.1. Excesul sferic

Diferența dintre suma unghiurilor într-un triunghi sferic (neafectată de erorile de măsurare) și condiția geometrică într-un triunghi plan ($\Sigma\alpha_i=200^g$) se numește ***exces sferic (ε)***:

$$\varepsilon = (\alpha)+(\beta)+(\gamma)-200^g \tag{2.1}$$

Intrucât în procesul de măsurare și de reducere a unghiurilor pe elipsoidul de referință se produc erori, valoarea cea mai probabilă a unghiurilor, se exprimă cu relația:

$$(\alpha)=\alpha^0+v_\alpha;(\beta)=\beta^0+v_\beta;(\gamma)=\gamma^0+v_\gamma \tag{2.2}$$

în care:

$\alpha^0, \beta^0, \gamma^0$ – unghiuri măsurate și reduse pe suprafața elipsoidului;

$(\alpha),(\beta),(\gamma)$ –valoarea cea mai probabilă a unghiurilor;

$v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ – corecțiile unghiurilor măsurate, obținute pe baza unei ecuații de corecții de forma:

$$v_\alpha+v_\beta+v_\gamma+W=0 \tag{2.3}$$

Se înlocuiește (2.2) în (2.1) și se exprimă corecțiile unghiurilor măsurate (2.3) în funcție de neînchiderea"W". Astfel rezultă:

$$\alpha^0+\beta^0+\gamma^0-200^g=\varepsilon+W \tag{2.4}$$

Pentru a se putea efectua calculele de compensare şi de rezolvare a triunghiurilor geodezice se impune , mai întâi, calculul expresiei excesului sferic.

In acest sens, în fig.2.1 se vor calcula suprafeţele fusurilor sferice, corespunzătoare unghiurilor α,β,γ, în funcţie de relaţiile de calcul ale acestora şi în mod geometric în funcţie de suprafaţa triunghiului sferic ABC şi ale triunghiurilor adiacente .

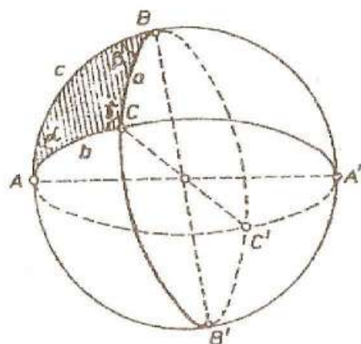


Fig.2.1. Excesul sferic

Astfel se obţine:

$$\begin{aligned}(\alpha\alpha)&=4\pi R^2\frac{\alpha}{400}\\(\beta\beta)&=4\pi R^2\frac{\beta}{400}\\(\gamma\gamma)&=4\pi R^2\frac{\gamma}{400}\end{aligned}\qquad(2.5)$$

Prin adunarea expresiilor fusurilor sferice se obţine:

$$(\alpha\alpha)+(\beta\beta)+(\gamma\gamma)=\frac{2\pi R^2}{200}(\alpha+\beta+\gamma)\qquad(2.6)$$

Exprimând suprafeţele aceloraşi fusuri sferice în mod geometric se obţine:

$$\begin{aligned}(\alpha\alpha)&=S+BA'C\\(\beta\beta)&=S+CB'A\\(\gamma\gamma)&=S+BC'A=S+CA'B'\end{aligned}\qquad(2.7)$$

Prin adunare rezultă:

$$(\alpha\alpha)+(\beta\beta)+(\gamma\gamma)=3S+2\pi R^2-S=2S+2\pi R^2\qquad(2.8)$$

In funcţie de (2.6) şi (2.8) se obţine:

$$\frac{4\pi R^2}{400}(\alpha+\beta+\gamma)=2S+2\pi R^2\qquad(2.9)$$

sau:

$$\frac{2\pi R^2}{200}\underbrace{(\alpha+\beta+\gamma-200^g)}_{\varepsilon}=2S\qquad(2.10)$$

de unde rezultă:

$$\varepsilon=\frac{200^g}{\pi}\frac{S}{R^2}=\rho^g\frac{S}{R^2}\qquad(2.11)$$

Intrucât mărimea excesului sferic este de ordinul secundelor şi factorul de transformare se va exprima în secunde:

$$\rho^{cc} = \frac{200*100*100}{\pi} \approx 636620^{cc} \qquad (2.11)$$

In triunghiurile geodezice mici, suprafaţa triunghiurilor sferice poate fi înlocuită cu suprafaţa triunghiurilor plane şi astfel se poate scrie:

$$\varepsilon^{cc} = \rho^{cc}\frac{S'}{R^2} = \rho^{cc}\frac{a'b'\sin\gamma'}{2R^2} = = \rho^{cc}\frac{a'c'\sin\beta'}{2R^2} = \rho^{cc}\frac{b'c'\sin\alpha'}{2R^2} \qquad (2.12)$$

Observaţie: Mărimile notate cu prim, în relaţia (2.12), reprezintă elementele triunghiului plan.

Prin aplicarea formulei de calcul a excesului sferic în triunghiuri sferice echilaterale, pentru valorile medii ale lungimii laturilor reţelelor de triangulaţie, se obţin valorile :

Tabelul 2.1

Lungime laturi [km]	2	4	7	15	25	30	60
Exces sferic ε^{cc}	0.027	0.108	0.332	1.524	4.234	6.097	24.388

Din tabelul 2.1 se observă că excesul sferic are valori mai semnificative pentru reţelele de triangulaţie de ordinal I şi II.

mai semnificative pentru reţelele de triangulaţie de ordinal I şi II.

2.2 Rezolvarea triunghiurilor sferice mici prin metoda Legendre

Fie un triunghi geodezic sferic ABC , (fig.2.2) pe sfera de rază medie Gauss, $Rm = \sqrt{MN}$, ale cărui laturi considerate în unităţi liniare (exemplu în metri) le notăm cu a, b, c. Corespunzător notăm laturile în radiani prin :

$$\hat{a} = \frac{a}{R};\hat{b} = \frac{b}{R};\hat{c} = \frac{c}{R} \qquad (2.13)$$

Aplicăm în triunghiul ABC teorema sinusului:

$$\frac{\sin\hat{a}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\hat{b}}{\sin\beta} \qquad (2.14)$$

sau:

$$\sin\hat{a}\sin\beta = \sin\hat{b}\sin\alpha \qquad (2.15)$$

Dezvoltăm în serie sinusurile ale căror argumente sunt mici şi avem :

$$\left(\hat{a} - \frac{\hat{a}^3}{6}\right)\sin\beta = \left(\hat{b} - \frac{\hat{b}^3}{6}\right)\sin\alpha \qquad (2.16)$$

sau , conform notaţiilor (2.13), relaţia (2.16) devine:

$$\left(\frac{a}{R}-\frac{a^3}{6R^3}\right)sin\beta=\left(\frac{b}{R}-\frac{b^3}{6R^3}\right)sin\alpha \qquad (2.17)$$

Dezvoltând (2.17) obținem :

$$a\,sin\beta-\frac{a^3\,sin\beta}{6R^2}=b\,sin\alpha-\frac{b^3\,sin\alpha}{6R^2}$$

$$a\left(\sin\beta-\frac{a^2\sin\beta}{6R^2}\right)=b\left(\sin\alpha-\frac{b^2\sin\alpha}{6R^2}\right) \qquad (2.18)$$

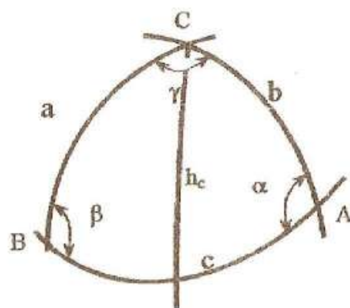


Fig.2.2. Triunghi sferic (Rezolvare Legendre)

Notând cu "h_c" înălțimea în triunghi coborâtă din "C" pe latura AB, se poate scrie:

$h_c = a \sin\beta = b \sin\alpha$ (formulă plană, însă aplicabilă din cauza numitorului foarte mare)

și deci :

$$a\left(sin\beta-\frac{ah_c}{6R^2}\right)=b\left(sin\alpha-\frac{bh_c}{6R^2}\right) \qquad (2.19)$$

Pe de altă parte , conform teoremei proiecțiilor din trigonometria plană avem :

$$\begin{aligned} a &= c\,cos\beta + b\,cos\gamma \\ b &= a\,cos\gamma + c\,cos\alpha \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Cu aceasta putem scrie :

$$\begin{aligned} &a\left(\sin\beta-\frac{c\cos\beta+b\cos\gamma}{6R^2}h_c\right)= \\ &=b\left(\sin\alpha-\frac{a\cos\gamma+c\cos\alpha}{6R^2}h_c\right) \end{aligned} \qquad (2.21)$$

După reducerea termenilor de același fel se obține :

$$a\left(sin\beta-\frac{ch_c}{6R^2}cos\beta\right)=b\left(sin\alpha-\frac{ch_c}{6R^2}cos\alpha\right) \qquad (2.22)$$

Notând excesului sferic "ε", pentru triunghiul considerat, cu expresia :

$$\varepsilon=\frac{ch_c}{2R^2} \qquad (2.23)$$

egalitatea (2.22), devine :

$$a\left(\sin\beta-\frac{\varepsilon}{3}\cos\beta\right)=b\left(\sin\alpha-\frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha\right) \qquad (2.24)$$

Datorită valorilor mici ale excesului sferic "ε" se poate înlocui valoarea argumentului cu valoarea funcției :

$$\frac{\varepsilon}{3}=tg\frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.25)$$

Astfel egalitatea (2.24) ia forma :

$$a\left(\sin\beta-tg\frac{\varepsilon}{3}\cos\beta\right)=b\left(\sin\alpha-tg\frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha\right) \qquad (2.26)$$

Inlocuind valoarea tangentei cu raportul dintre sinus și cosinus și aducând la același numitor se obține :

$$a\left(\sin\beta\cos\frac{\varepsilon}{3}-\sin\frac{\varepsilon}{3}\cos\beta\right)=b\left(\sin\alpha\cos\frac{\varepsilon}{3}-\sin\frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha\right) \qquad (2.27)$$

sau:

$$a\sin\left(\beta-\frac{\varepsilon}{3}\right)=b\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

$$\frac{a}{\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{3}\right)}=\frac{b}{\sin\left(\beta-\frac{\varepsilon}{3}\right)} \qquad (2.28)$$

În general se poate scrie :

$$\frac{a}{\sin\alpha'}=\frac{b}{\sin\beta'}=\frac{c}{\sin\gamma'} \qquad (2.29)$$

în care :

$$\alpha'=\alpha-\frac{\varepsilon}{3};\beta'=\beta-\frac{\varepsilon}{3};\gamma'=\gamma-\frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.30)$$

În concluzie, ***a rezolva triunghiul sferic ABC este identic cu a rezolva triunghiul plan A'B'C' ale cărui laturi sunt egale cu cele ale triunghiului sferic și ale cărui unghiuri α', β', γ' sunt micșorate față de cele ale triunghiului sferic cu o treime din valoarea excesului sferic (*** $\frac{\varepsilon}{3}$***).***

Recapitulând etapele de rezolvare ale triunghiurilor elipsoidice mici, prin metoda Legendre , se menționează:

- calculul excesului sferic ;
- compensarea unghiurilor în triunghiul elipsoidic mic prin repartiția neînchiderii "w"în mod egal celor trei unghiuri;
- calculul unghiurilor în triunghiul plan prin corectarea celor de pe elipsoid cu o treime din excesul sferic;
- calculul celorlalte laturi în triunghiul plan care, conform teoriei sunt egale cu cele din triunghiul sferic.

2.2.Rezolvarea triunghiurilor sferice mici , prin metoda Soldner

Considerăm din nou triunghiul sferic ABC, fig.2.3, ale cărui unghiuri sunt α, β, γ și laturile a , b , c.
Aplicând teorema sinusului obținem seria de rapoarte :

$$\frac{\sin\widehat{a}}{\sin\alpha}=\frac{\sin\widehat{b}}{\sin\beta}=\frac{\sin\widehat{c}}{\sin\gamma} \qquad (2.31)$$

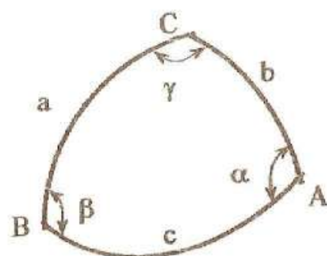


Fig.2.3.Rezolvarea triunghiurilor elipsoidale mici (metoda Soldner)

sau :

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\alpha}=\frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin\beta}=\frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin\gamma} \qquad (2.32)$$

Se dezvoltă în serie sinusurile de argumente mici, până la primii doi termeni şi se obţine :

$$\sin\frac{a}{R}=\frac{a}{R}-\frac{a^3}{6R^3};$$
$$\sin\frac{b}{R}=\frac{b}{R}-\frac{b^3}{6R^3}; \qquad (2.33)$$
$$\sin\frac{c}{R}=\frac{c}{R}-\frac{c^3}{6R^3}$$

Inlocuind (2.33), în (2.32), după simplificări rezultă :

$$\frac{a-\frac{a^3}{6R^2}}{\sin\alpha}=\frac{b-\frac{b^3}{6R^2}}{\sin\beta}=\frac{c-\frac{c^3}{6R^2}}{\sin\gamma} \qquad (2.34)$$

Introducem notaţiile :

$$a-\frac{a^3}{6R^2}=a';b-\frac{b^3}{6R^2}=b';c-\frac{c^3}{6R^2}=c' \qquad (2.35)$$

sau, în caz general :

$$s'=s-\frac{s^3}{6R^2}=s-A_s \qquad (2.36)$$

unde: "A_s" se numeşte aditament liniar a laturii "s", de unde rezultă a doua denumire sub care este cunoscută metoda: ***metoda aditamentelor.***

Cu acestea se poate scrie :

$$\frac{a'}{\sin\alpha}=\frac{b'}{\sin\beta}=\frac{c'}{\sin\gamma} \qquad (2.37)$$

S-a obţinut în acest fel formula sinusului cunoscută pentru elementele unui triunghi plan.

De aici concluzia că: ***triunghiul sferic A, B, C, poate fi rezolvat ca un triunghi plan cu condiţia ca triunghiul plan să aibă aceleaşi unghiuri ca triunghiul sferic, iar laturile să fie a′, b′, c′ date de relaţiile (2.35).***

Pentru rezolvarea triunghiurilor geodezice mici prin aceasă metodă se parcurg etapele:

- calculul excesului sferic;
- compensarea unghiurilor în triunghiul elipsoidic mic prin repartizarea neînchiderii în mod egal celor trei unghiuri:

$$\alpha = \alpha^0 - \frac{w}{3}; \beta = \beta^0 - \frac{w}{3}; \gamma = \gamma^0 - \frac{w}{3} \qquad (2.38)$$

unde:

$\alpha^0, \beta^0, \gamma^0$ - valoarea unghiurilor măsurate şi reduse pe suprafaţa elipsoidului de referinţă;

w – neînchiderea în triunghiul sferic:

$$w = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - (200 + \varepsilon) \qquad (2.39)$$

- calculul aditamentului liniar al laturii "a" şi apoi al valorii laturii în triunghiul plan;
- calculul celorlalte laturi ale triunghiului plan;
- calculul aditamentelor liniare ale celorlalte laturi şi apoi a mărimii lor, în triunghiul elipsoidic mic.

3.PROBLEME GEODEZICE DE BAZĂ

3.1.Scopul şi importanţa problemelor geodezice de bază

Pe baza observaţiilor executate pe suprafaţa terestră, proiectate pe elipsoidul de referinţă, urmează să stabilim prin calcul poziţiile punctelor geodezice de prim ordin într-un anumit sistem de coordonate utilizat pe elipsoid.

Pentru că sistemul coordonatelor geodezice prezintă avantaje deosebite comparativ cu celelalte sisteme, privind calculele necesare şi modul unitar de determinare a punctelor geodezice, indiferent de poziţia lor pe suprafaţa elipsoidului, în practica geodezică este utilizat în mod curent.

Problemele geodezice de bază se referă la sistemul coordonatelor geografice elipsoidale şi constau în următoarele :

a. ***Problema geodezică directă***, determină coordonatele geodezice "B_2", "L_2" ale unui punct , "S_2" (fig.3.1) şi azimutul "A_2" în acest punct în funcţie de coordonatele geodezice ale punctului "S_1"(B_1, L_1) şi elementele geodezice de legătură (distanţa "s_{12}" între punctele "S_1" şi "S_2" şi azimutul "A_1" în punctul "P_1").

Această problemă este similară cu problema cunoscută la topografie, privind determinarea coordonatelor (x_2, y_2) ale unui punct "S_2" în funcţie de coordonatele (x_1, y_1) ale punctului "S_1",distanţa "s_{12}" şi orientarea "θ_{12}".

Problema geodezică directă, dat fiind scopul care-l urmăreşte, mai poartă denumirea şi de problema transportului de coordonate geodezice.

b. ***Problema geodezică inversă***, utilizează ca mărimi coordonatele geodezice, "B_1", "L_1" şi "B_2", "L_2" ale punctelor "S_1" şi "S_2" cu ajutorul cărora se determină azimutele "A_1", "A_2" şi lungimea liniei geodezice "s_{12}".

Cu problema geodezică directă se calculează coordonatele unor puncte geodezice ce formează o reţea geodezică de ordinul I, iar cu problema geodezică inversă se calculează elementele geodezice iniţiale (distanţe şi azimute) şi se verifică calculele efectuate la problema geodezică directă.

3.2. Precizia de calcul a coordonatelor geodezice

Precizia de calcul, ca în orice problemă geodezică, urmăreşte ca erorile de calcul să fie de cca. 10 ori mai mici faţă de erorile medii ale mărimilor măsurate.

Evident, aceasta este în funcţie şi de distanţele între punctele geodezice, respectiv cu cât distanţele cresc precizia calculelor are o semnificaţie deosebită.

Se poate arăta că, în triangulaţia de ordinul I în care intervin distanţe geodezice, (în medie de 30 – 4o km) este necesar ca aproximaţia de calcul pentru coordonatele geodezice "B" şi "L" să fie de ± 0'',0001, pentru azimute de ± 0'',001, iar pentru distanţe de ± 0,001m.

De asemenea din cauza distanţelor geodezice relativ mici, la rezolvarea problemelor geodezice se aplică metode în care se acceptă unele aproximaţii cum ar fi: dezvoltări în serie, înlocuirea suprafeţei elipsoidului cu sfera de rază medie, etc.

3.3.Rezolvarea problemei geodezice directe

In funcţie de lungimea liniei geodezice se pot distinge următoarele metode de rezolvare a problemelor geodezice directe:

- metoda dezvoltării în serie (metoda Legendre), pentru distanţe mici s<60 km;
- metoda argumentelor medii(metoda Gauss), pentru distanţe medii 60<s<600km;
- metoda Bessel, pentru distanţe geodezice mari <600<20000 km.

De menţionat, că în prezenta lucrare se vor trata numai metodele de rezolvare a problemelor geodezice pentru distanţe scurte (s<60 km), urmând ca persoanele interesate să regăsească celelalte metode în [10],[12], [13], [24] etc.

3.3.1.Metoda dezvoltărilor în serie

Fiind cunoscută poziţia punctului iniţial $S_1(B_1,L_1)$, lungimea liniei geodezice "s" şi azimutul "A_1" al direcţiei S_1S_2 (fig.3.1), se pune problema determinării coordonatelor geodezice "B_2" şi "L_2", ale punctului "S_2" şi azimutul invers "A_2".

Deoarece diferenţele (B_2-B_1), (L_2-L_1) şi (A_2-A_1) vor fi funcţie numai de lungimea liniei geodezice "s" se acceptă următoarele dezvoltări în serie Maclaurain:

$$B_2-B_1=\frac{dB}{ds}s+\frac{d^2B}{ds^2}\frac{s^2}{2!}+\frac{d^3B}{ds^3}\frac{s^3}{3!}+\ldots$$

$$L_2 - L_1 = \frac{dL}{ds}s + \frac{d^2L}{ds^2}\frac{s^2}{2!} + \frac{d^3L}{ds^3}\frac{s^3}{3!} + \ldots$$
$$A_2 - A_1 = \frac{dA}{ds}s + \frac{d^2A}{ds^2}\frac{s^2}{2!} + \frac{d^3A}{ds^3}\frac{s^3}{3!} + \ldots \quad (3.1)$$

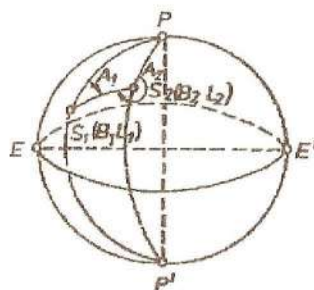


Fig.3.1.Problema geodezică directă

Derivatele din egalitățile (3.1.) se calculează în punctul "S_1", deci cu mărimile cunoscute în acest punct.

Pentru calculul derivatelor de ordinul I, ne vom referi la fig.3.2, în care "ds" este un element liniar al liniei geodezice S_1S_2. Elementele cunoscute în punctul "S_1" (latitudine, longitudine și azimut) sunt notate cu B, L, A, urmând ca expresiile derivatelor de ordinal I să fie stabilite în mod geometric.

Astfel din triunghiurile $S_1S'S$ și $O'S'S_1$ rezultă derivata latitudinii "B" în raport cu lungimea infinitezimală a liniei geodezice :

$$S_1S' = \mathrm{ds}\cos \mathrm{A} = MdB \Rightarrow \frac{dB}{\mathrm{ds}} = \frac{\cos \mathrm{A}}{M} \quad (3.2)$$

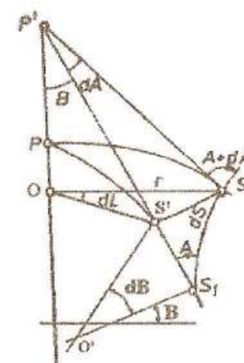


Fig.3.2. Metoda Legendre

Din triunghiurile $S_1S'S$ și OSS' rezultă derivata longitudinii (L) în raport cu linia geodezică :

$$SS' = \mathrm{r}dL = ds\sin A \Rightarrow \frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{\mathrm{r}} = \frac{\sin A}{\mathrm{NcosB}} \quad (3.3)$$

Din triunghiurile $S_1S'S$ și $P'SS'$ rezultă derivata azimutului (A) în raport cu ds:

$$S'S = \overline{P'S'}dA = ds\sin B \Rightarrow \frac{dA}{ds} = \frac{\sin B}{\overline{P'S'}} =$$
$$= \frac{\sin B}{\frac{r}{\sin B}} = \frac{\sin B}{\frac{N\cos A}{\sin B}} \Rightarrow \frac{dA}{ds} = \frac{tgB\sin A}{N} \quad (3.4)$$

Recapitulând, expresiile derivatelor de ordinul întâi se prezintă sub forma:

$$\frac{dB}{ds}=\frac{\cos A}{M}$$

$$\frac{dL}{ds}=\frac{\sin A}{N\cos B} \qquad (3.5)$$

$$\frac{dA}{ds}=\frac{tgB\sin A}{N}$$

Inlocuind în (3.5) valorile razelor de curbură, conform relațiilor (l.34) și (1.36) se obține:

$$\frac{dB}{ds}=\frac{V^3}{c}\cos A$$

$$\frac{dL}{ds}=\frac{V}{c}\frac{\sin A}{\cos\varphi} \qquad (3.6)$$

$$\frac{dA}{ds}=\frac{V}{c}tgB\sin A$$

Derivatele de ordin superior ordinului întâi se obțin derivând succesiv în raport cu "s" expresiile (3.6) .Astfel, derivatele de ordinul doi se prezintă sub forma :

$$\frac{d^2B}{ds^2}=\frac{1}{c}\left(3V^2\cos A\frac{dV}{dB}\frac{dB}{ds}-V^3\sin A\frac{dB}{ds}\right) \qquad (3.7)$$

$$\frac{d^2L}{ds^2}=\frac{1}{c}\left(\frac{\sin A}{\cos B}\frac{dV}{dB}\frac{dB}{ds}+\frac{V}{\cos B}\cos A\frac{dA}{ds}+\frac{V\sin A}{\cos^2 B}\sin B\frac{dB}{ds}\right)$$

$$\frac{d^2A}{ds^2}=\frac{1}{c}\left(tgB\sin A\frac{dV}{dB}\frac{dB}{ds}+\frac{V}{\cos B}\sin A\frac{dB}{ds}+VtgB\cos A\frac{dA}{ds}\right)$$

In urma prelucrării relațiilor (3.7.) rezultă :

$$\left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_1=-\frac{V^4}{c^2}t_1\left(3\eta_1^2\cos^2 A_1+\sin^2 A_1\right)$$

$$\frac{d^2B}{ds^2}=\frac{2V^2}{c^2\cos B}t_1\sin A_1\cos A_1 \qquad (3.8)$$

$$\frac{d^2A}{ds^2}=\frac{V^2}{c^2}\sin A_1\cos A_1\left(1+2t_1^2+\eta_1^2\right)$$

în care s-a notat :

$$t_1=\mathrm{tg}\ B_1$$

$$\eta_1=e'\cos B_1 \qquad (3.9)$$

Pentru celelalte derivate se procedează analog.

Revenind la relația (3.I.), în care se înlocuiesc expresiile derivatelor se obțin relațiile definitive :

$$\frac{B_2-B_1}{V^2}=u-\frac{1}{2\rho}v^2t-\frac{3}{2\rho}u^2\eta^2t-\frac{v^2u}{6\rho^2}\left(1+3t^2+\eta^2-9\eta^2t^2\right)-$$
$$-\frac{u^3}{2\rho^2}\eta^2\left(1-t^2\right)+\frac{v^4}{24\rho^3}t\left(1+3t^2\right)-\frac{v^2u^2}{6\rho^3}t\left(2+3t^2\right)+\ldots \quad (3.10)$$

$$\left(L_2-L_1\right)\cos B=v+\frac{1}{\rho}vut-\frac{v^3}{3\rho^2}t^2+\frac{vu^2}{3\rho^2}\left(1+3t^2+\eta^2\right)-$$
$$-\frac{v^3u}{3\rho^3}t\left(1+3t^2\right)+\frac{vu^3}{3\rho^3}\left(2+3t^2\right)+\ldots$$
$$(3.11)$$

$$A_2-A_1=vt+\frac{vu}{2\rho}\left(1+2t^2+\eta^2\right)-\frac{v^3}{6\rho^2}t\left(1+2t^2+\eta^2\right)+$$
$$+\frac{vu^3}{6\rho^2}\left(5+6t^2+\eta^2\right)-\frac{v^3u}{24\rho^3}\left(1+20t^2+24t^2\right)+\ldots \quad (3.12)$$

în care :

$$u=\frac{\rho}{N}s\cos A=\frac{\rho}{c}Vs\cos A$$
$$v=\frac{\rho}{N}s\sin A=\frac{\rho}{c}Vs\sin A \quad (3.13)$$

Relațiile (3.10.) , (3.11.) și (3.12.) pot fi scrise mai simplu notând coeficienții mărimilor u , v , u^2, v^2, ... cu a, b, c... ,de indici diferiți.

Pentru elipsoidul de referință Krasovski acești coeficienți se extrag din tabele în funcție de latitudinea "B_1" a punctului "P_1".

3.3.2. Metoda înlocuirii suprafeței elipsoidului cu sfera Gauss

Considerăm punctele "P_1" și "P_2" (fig.3.3.a) pe o sferă de rază medie a triunghiului sferic P_1PP_2 .Se cunosc coordonatele geodezice ale punctului "P_1"(B_1, $L_1=0$), azimutul direcției P_1 P_2 (*A1*) și lungimea liniei geodezice "*s*". Se vor determina coordonatele punctului "P_2" (B_2, L_2) *și azimutul invers"*A_2*"*.

Pentru a ușura scrierea relațiilor se alege un triunghi sferic a căror elemente sunt reprezentate în fig. 3.3. b.

Pentru rezolvarea problemei scriem formulele a trei elemente adiacente într-un triunghi sferic oarecare (fig.3.3 b) și obținem :

$$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{A}{2}$$
$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2}=\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2}=\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{A}{2} \quad (3.13)$$
$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2}=\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{A}{2}$$

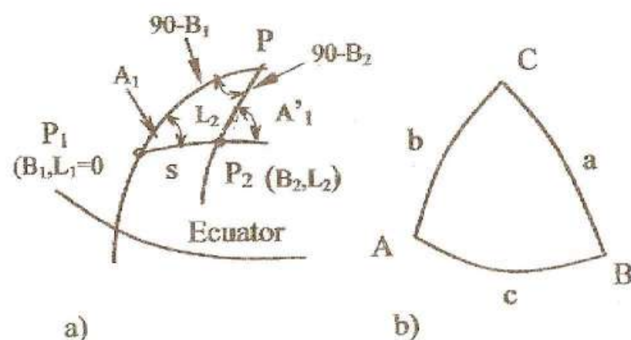


Fig.3.3. a.Triunghiul sferic pe sferă;
b. Notațiile în triunghiul sferic.

Triunghiul sferic ABC identificat cu triunghiul sferic P_1P_2P conduce la egalitățile :

$$A = A_1 \qquad a = 90^0 - B_2$$
$$B = 180^0 - A'_1 \qquad b = 90^0 - B_1 \qquad (3.14)$$
$$C = L_2 \qquad c = s$$

și cu ajutorul acestora :

$$\frac{B-C}{2}=\frac{180^0-A_1'-L_2}{2}=90^0-\frac{A_1'+L_2}{2};\quad \frac{b+c}{2}=\frac{90^0-B_1+s}{2}$$
$$\frac{B+C}{2}=\frac{180^0-A_1'+L_2}{2}=90^0-\frac{A_1'-L_2}{2};\quad \frac{b-c}{2}=\frac{90^0-B_1-s}{2}$$
$$\frac{A}{2}=\frac{A_1}{2};\quad \frac{a}{2}=\frac{90^0-B_2}{2} \qquad (3.15)$$

Introducând egalitățile (3.15.) în (3.13.) se obține: :

$$\text{I} \qquad \sin\frac{90^0-B_2}{2}\sin\frac{A_1'+L_2}{2}=\sin\frac{90^0-B_1+s}{2}\sin\frac{A_1}{2}$$

$$\text{II} \qquad \sin\frac{90^0-B_2}{2}\cos\frac{A_1'+L_2}{2}=\sin\frac{90^0-B_1-s}{2}\cos\frac{A_1}{2}$$

$$\text{III} \qquad \cos\frac{90^0-B_2}{2}\sin\frac{A_1'-L_2}{2}=\cos\frac{90^0-B_1+s}{2}\sin\frac{A_1}{2}$$

$$\text{IV} \qquad \cos\frac{90^0-B_2}{2}\cos\frac{A_1'-B_2}{2}=\cos\frac{90^0-B_1-s}{2}\cos\frac{A_1}{2} \qquad (3.16)$$

Prin împărțirea relațiilor I și II; III și IV se obține:

$$tg\frac{A_1'+L_2}{2}=\frac{\sin\frac{90^0-B_1+s}{2}}{\sin\frac{90^0-B_1-s}{2}}tg\frac{A_1}{2}$$
$$tg\frac{A_1'-L_2}{2}=\frac{\cos\frac{90^0-B_1+s}{2}}{\cos\frac{90^0-B_1-s}{2}}tg\frac{A_1}{2} \qquad (3.17)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (3.17) se obțin necunoscutele "A_1'" și "L_2" în funcție de coordonatele geodezice ale punctului "P_1" și lungimea geodezică "s". Azimutul invers $A_2 = A_1' + 200^g$.

Pentru a afla latitudinea geodezică a punctului "P_2" (B_2) se împart relațiie I și III ; II și IV:

$$tg\frac{90-B_2}{2}=\frac{\sin\frac{A_1^{'}-L_2}{2}}{\sin\frac{A_1^{'}+L_2}{2}}tg\frac{90-B_1+s}{2} \tag{3.18}$$

$$tg\frac{90-B_2}{2}=\frac{\cos\frac{A_1^{'}-L_2}{2}}{\cos\frac{A_1^{'}+L_2}{2}}tg\frac{90-B_1-s}{2}$$

Cele două relații (3.18.) determină aceeași mărime și anume latitudinea "B_2" a punctului "P_2".

Este de precizat că metoda descrisă conduce la aceleași valori cu cele obținute prin utilizarea relațiilor (3.10.), (3.11.), (3.12.), dar transformate, în sensul că semiaxele suprafeței elipsoidului vor fi egale, deci a = b și în consecință :

- excentricitatea $e = e' = 0$

$$R=\sqrt{MN}=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2}=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 B}=a$$
$$R=\sqrt{MN}=\frac{c}{V^2}=\frac{c}{1+e'^2\cos^2 B}=c=\frac{a^2}{b}=a \tag{3.19}$$

deci:

$N = M = R$

3.4. Rezolvarea problemei geodezice inverse

3.4.1.Metoda înlocuirii suprafeței elipsoidului cu sfera Gauss

In limita aproximațiilor admisibile, pentru distanțe mici, se poate asimila suprafața elipsoidului cu suprafața unei sfere de rază medie Gauss.

Ne vom referi la figurile 3.4 a și 3.4 b , pe baza cărora putem, în primă etapă, scrie formulele semisumei și semidiferenței sinusului și cosinusului în triunghiurile sferice:

$$sin\frac{a}{2}cos\frac{B-C}{2}=sin\frac{b+c}{2}sin\frac{A}{2}$$

$$sin\frac{a}{2}sin\frac{B-C}{2}=sin\frac{b-c}{2}cos\frac{A}{2} \tag{3.20}$$

$$cos\frac{a}{2}cos\frac{B+C}{2}=cos\frac{b+c}{2}sin\frac{A}{2}$$

$$cos\frac{a}{2}sin\frac{B+C}{2}=cos\frac{b-c}{2}cos\frac{A}{2}$$

Prin identificarea triunghiurilor P_1PP_2 și CAB rezultă :

$$\begin{aligned} A &= L_2 & a &= s \\ B &= 180-A_1^{'} & b &= 90-B_1 \\ C &= A_1 & c &= 90-B_2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

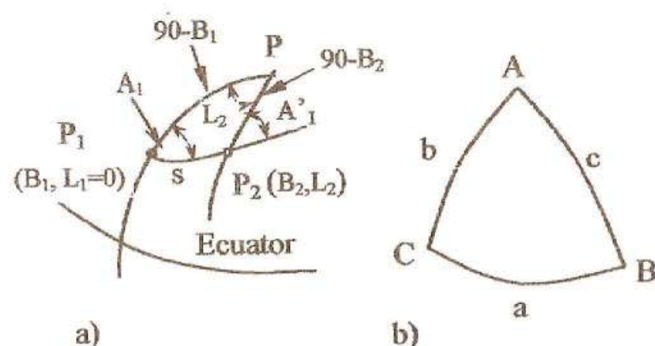


Fig.3.4.a.Triunghiul pe sferă;
b. Triunghiul sferic corespondent

şi cu ajutorul acestora se calculează:

$$\frac{B-C}{2}=\frac{180^0-A_1^{'}-A_1}{2}=90^0-\frac{A_1^{'}+A_1}{2};$$

$$\frac{b-c}{2}=\frac{90^0-B_1-(90^0-B_2)}{2}=\frac{B_2-B_1}{2}$$

$$\frac{B+C}{2}=\frac{180^0-A_1^{'}+A_1}{2}=90^0-\frac{A_1^{'}-A_1}{2};$$
$$\frac{b+c}{2}=\frac{180^0-B_1-B_2}{2}=90^0-\frac{B_1+B_2}{2} \qquad (3.22)$$

$$\frac{A}{2}=\frac{L_2}{2};\quad \frac{a}{2}=\frac{s}{2}$$

Inlocuind egalităţile (3.22.) în (3.20.) se obţine :

$$\text{I}\qquad \sin\frac{s}{2}\sin\frac{A_1^{'}+A_1}{2}=\cos\frac{B_2+B_1}{2}\sin\frac{L_2}{2}$$

$$\text{II}\qquad \sin\frac{s}{2}\cos\frac{A_1^{'}+A_1}{2}=\sin\frac{B_2-B_1}{2}\cos\frac{L_2}{2} \qquad (3.23)$$

$$\text{III}\qquad \cos\frac{s}{2}\sin\frac{A_1^{'}-A_1}{2}=\sin\frac{B_2+B_1}{2}\sin\frac{L_2}{2}$$

$$\text{IV}\qquad \cos\frac{s}{2}\cos\frac{A_1^{'}-A_1}{2}=\cos\frac{B_2-B_1}{2}\cos\frac{L_2}{2}$$

Împărţind egalităţile I la II şi III la IV obţinem :

$$tg\frac{A_1^{i}+A_1}{2}=\frac{\cos\frac{B_2+B_1}{2}}{\sin\frac{B_2-B_1}{2}}tg\frac{L_2}{2}$$
$$tg\frac{A_1^{'}-A_1}{2}=\frac{\sin\frac{B_2+B_1}{2}}{\cos\frac{B_2-B}{2}}tg\frac{L_2}{2} \qquad (3.24)$$

În relaţiile (3.24.), coordonatele punctelor "P_1" şi "P_2" fiind date, rezultă că "B_1", "B_2" şi "L_2" sunt cunoscute; deci

prin rezolvarea sistemului de ecuații pot fi determinate azimutele "A_1" și "A_1'".

Împărțind egalitățile I la III, și II la IV se obține:

$$tg\frac{s}{2}=\frac{\sin\frac{A_1'-A_1}{2}}{\sin\frac{A_1'+A_1}{2}}ctg\frac{B_2+B_1}{2} \qquad (3.25)$$

$$tg\frac{s}{2}=\frac{\cos\frac{A_1'-A_1}{2}}{\cos\frac{A_1'+A_1}{2}}tg\frac{B_2-B_1}{2}$$

Una din relațiile (3.25) se utilizează pentru calculul lungimii liniei geodezice dintre punctele "P_1" și "P_2", iar cealaltă pentru verificare.

4. RETELE GEODEZICE

Baza ridicărilor topografice și fotogrammetrice este formată din puncte geodezice uniform distribuite pe suprafața terestră și de o anumită densitate.

O ***rețea geodezică*** este constituită din multitudinea punctelor situate pe suprafața topografică, pentru care se cunosc coordonatele punctelor într-un sistem unitar de referință.

Poziționarea punctelor care alcătuiesc o rețea geodezică în raport cu o anumită suprafață de referință constituie una din problemele de bază ale Geodeziei, pe lângă determinarea formei și dimensiunilor Pământului.

Conceptul de poziționare punctuală, utilizat de Moldoveanu [13] se referă la stabilirea poziției unor puncte de pe suprafața terestră , apă sau din spațiu prin coordonate rectangulare, geodezice sau sferice, într-un sistem unitar de coordonate.

Inainte de prezentarea și tratarea propriu-zisă a rețelelor geodezice se va face referire la datele geodezice fundamentale utilizate la rezolvarea rețelelor de triangulație.

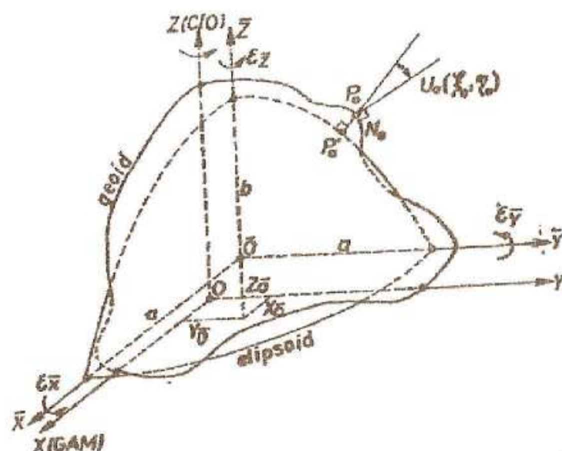
4.1.Date geodezice fundamentale de referință

Datele care poziționează sistemul de coordonate global elipsoidal $(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z})$, sau a oricărui alt sistem, în interiorul sistemului cartezian geocentric (X,Y,Z) se numesc ***date fundamentale de referință*** (fig.4.1).

Determinarea datelor geodezice fundamentale de referinţă, precum şi a punctului geodezic fundamental, constituie una dintre problemele importante şi în acelaşi timp dificile ale Geodeziei.

Sub forma cea mai generală , determinarea datelor geodezice fundamentale de referinţă, după [12], ar include stabilirea următorilor parametri:

- coordonatele $X_{\bar{O}}, Y_{\bar{O}}, Z_{\bar{O}}$ ale originii sistemului global elipsoidal în interiorul sistemului cartezian geocentric;
- unghiurile de rotaţie $\varepsilon_{\bar{X}}, \varepsilon_{\bar{Y}}, \varepsilon_{\bar{Z}}$ ale axelor sistemului elipsoidal în raport de sistemul geocentric;
- parametri geometrici principali "a" şi "f" ai elipsoidului optim corespondent;
- punctul geodezic fundamental.



4.1.Date geodezice fundamentale

Se numeşte ***punct geodezic fundamental,*** acel punct al reţelei geodezice, în care se consideră că suprafaţa elipsoidului este tangentă la suprafaţa geoidului, iar verticala locului coincide cu normala la elipsoid.

De menţionat că triangulaţia veche a Romaniei, dinaintea celui de-al doilea război mondial, a avut ca punct fundamental observatorul astronomic militar din Dealul Piscului (Bucureşti), cu azimutul iniţial spre Foişorul de Foc.Orientarea elipsoidului Hayford în interiorul geoidului s-a făcut pe baza determinărilor astronomice din acest punct.

Din 1951 până în prezent triangulaţia de stat a Romaniei, are următoarele date geodezice fundamentale:

- elipsoidul de referinţă Krasovski 1942;
- punctul fundamental Pulkovo (Rusia) de coordonate geodezice $B=59^0 46' 15'',359$ şi $L=30^0 19' 28'',318$;
- azimutul geodezic Pulkovo-Bugrî ($A=121^0 06' 42'',305$).

Determinarea datelor geodezice fundamentale de referinţă a preocupat pe mai mulţi geodezi (Helmert 1880, Krasovski 1955, Heiskanen-Moritz 1967, Torje 1975, Groten1979 etc) dintre, care în cele ce urmează, se va prezenta metoda Helmert, metodă ce a fost utilizată de Hayford în determinarea parametrilor primului elipsoid intrenaţional.

In mare, metoda Helmert constă în :

- neglijarea unghiurilor de rotaţie dintre axele de coordonate a celor două sisteme menţionate:

$$\varepsilon_{\bar{X}} = \varepsilon = \varepsilon_{\bar{Z}} = 0 \qquad 4.1)$$

- înlocuirea coordonatelor $X_{\bar{O}}, Y_{\bar{O}}, Z_{\bar{O}}$, cu componentele deviaţiei verticalei ξ_0, η_0 şi a ondulaţiei geoidului

"N_0" în punctul geodezic fundamental "P_0". Cu mărimile ξ_0, η_0 şi "N_0" ,.se realizează poziţionarea şi orientarea elipsoidului de referinţă în interiorul geoidului;

- efectuarea ***măsurătorilor astronomice complete (Φ, Λ, α, măsurători de baze si direcţii)*** în punctul geodezic fundamental şi în punctele Laplace;
- calculul parametrilor "a" şi "f" ai elipsoidului de referinţă optimal pentru reţeaua considerată:

$$a = a^0 + da$$
$$f = f^0 + df \qquad (4.2)$$

Calculele se vor efectua pe un elipsoid oarecare, cu parametri a^0 şi f^0 consideraţi ca valori provizorii.

De reţinut:

- punctele în care se fac măsurători astronomice complete se numesc ***puncte Laplace,*** iar numărul acestora este mult mai mic decât numărul punctelor geodezice din reţea ;
- parametri care definesc ***datele geodezice fundamentale de referinţă, în metoda Helmert, sunt:*** ξ_0, η_0, ***N_0, a, f*** ale căror semnificaţie a fost prezentată în capitolele anterioare.

In detaliu metoda Helmert constă în:

1.Acceptarea, într-o primă etapă, în punctul geodezic fundamental, a identităţii între coordonatele astronomice şi cele geodezice , precum şi identitatea dintre azimutul astronomic inţial α_{01} şi cel geodezic A_{01},. De asemenea, nu se ia în considerare deviaţia de la verticală a normalei şi nici ondulaţia geoidului. Astfel se poate scrie:

$$P_0(B_0^0 = \Phi_0; L_0^0 = \Lambda_0; A_0^0 = \alpha_0; N_0 = 0) \qquad (4.3)$$

2.Determinarea prin calcul a tuturor punctelor reţelei geodezice (B_i^0, L_i^0), inclusiv a punctelor Laplace în care s-au efectuat observaţii astronomice.

3.Calculul abaterilor de la verticală în punctele Laplace:

$$\xi_{L_i}^0 = \Phi_{L_i} - B_{L_i}^0$$
$$\eta_{L_i}^0 = (\Lambda_{L_i} - L_{L_i}^0)\cos\Phi_{L_i}; i = 1,2...t \qquad (4.4)$$

Se încheie astfel, etapa preliminară de calcul şi se trece în continuare la rezolvarea problemei propriu-zise, unde necunoscutele sunt:

- ***da, df*** -modificări în parametri elipsoidului folosit iniţial;
- ***dB_0, dL_0, dA_0*** – modificări în coordonatele punctului iniţial.

4.Calculul coordonatelor reţelei (B_i, L_i) pe noul elipsoid:

$$B_i = B_i^0 + dB_i;$$
$$L_i = L_i^0 + dL_i \qquad (4.5)$$

în care, diferenţele dB_i şi dL_i se calculează cu relaţiile:

$$dB_i = \frac{\partial B_i}{\partial B_0}dB_0 + \frac{\partial B_i}{\partial L_0}dL_0 + \frac{\partial B_i}{\partial A_0}dA_0 + \frac{\partial B_i}{\partial a}da + \frac{\partial B_i}{\partial f}df;$$

$$dL_i = \frac{\partial L_i}{\partial B_0} dB_0 + \frac{\partial L_i}{\partial L_0} dL_0 + \frac{\partial L_i}{\partial A_0} dA_0 + \frac{\partial L_i}{\partial a} da + \frac{\partial L_i}{\partial f} df; (4.6)$$

unde derivatele parţiale:

$$\frac{\partial B_i}{\partial B_0}, \frac{\partial B_i}{\partial L_0}, \ldots; \frac{\partial L_i}{\partial B_0}, \frac{\partial L_i}{\partial L_0}, \ldots\ldots$$

reprezintă coeficienţii necunoscutelor problemei luate în studiu, ale căror valori se obţin prin calcule complexe ce se regăsesc în [10].

Pe noul elipsoid abaterile de la verticală ale normalei, în punctele Laplace, se calculează cu relaţiile:

$$\begin{aligned} \xi_{L_i} &= \Phi_{L_i} - B_{L_i} = \Phi_{L_i} - (B^0_{L_i} + dB_{L_i}) = \xi^0_{L_i} - dB_{L_i} \\ \eta_{L_i} &= (\Lambda_{L_i} - L_{L_i})\cos\Phi_{L_i} = [\Lambda_{L_i} - (L^0_{L_i} + dL_{L_i})]\cos\Phi_{L_i} = \\ &= \eta^0_{L_i} - dL_{L_i}\cos\Phi_{L_i}; i = 1, 2..t \end{aligned} \quad (4.7)$$

unde s-a notat cu:

B_{L_i}, L_{L_i} - coordonatele geodezice calculate ale punctului Laplace L_i;

$\Phi_{L_i}, \Lambda_{L_i}$ - coordonatele astronomice măsurate ale punctului Laplace L_i;

ξ_{L_i}, η_{L_i} - abaterile de la verticală ale normalei în punctul Laplace "L_i",pe noul elipsoid;

$\xi^0_{L_i}, \eta^0_{L_i}$ - abaterile de la verticală ale normalei în punctul Laplace "L_i",pe elipsoidul provizoriu;

Tinând seama de expresiile (4.6), relaţiile (4.7) devin:

$$\begin{aligned} \xi_{L_i} &= \xi^0_{L_i} - \frac{\partial B_{L_i}}{\partial B_0} dB_0 - \frac{\partial B_{L_i}}{\partial L_0} dL_0 - \frac{\partial B_{L_i}}{\partial A_0} dA_0 - \frac{\partial B_{L_i}}{\partial a} da - \frac{\partial B_{L_i}}{\partial f} df; \\ \eta_{L_i} &= \eta^0_{L_i} - \frac{\partial L_{L_i}}{\partial B_0}\cos\Phi_{L_i} dB_0 - \frac{\partial L_{L_i}}{\partial L_0}\cos\Phi_{L_i} dL_0 - \\ &- \frac{\partial L_{L_i}}{\partial A_0}\cos\Phi_{L_i} dA_0 - \frac{\partial L_{L_i}}{\partial a}\cos\Phi_{L_i} da - \frac{\partial L_{L_i}}{\partial f}\cos\Phi_{L_i} df \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pentru a arăta că în noua etapă de calcul nu se neglijează deviaţia verticalei, Helmert introduce în locul necunoscutelor dB_0, şi dL_0 necunoscutele $d\xi_0$ şi $d\eta_0$, obţinute prin diferenţierea relaţiilor:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \Phi_0 - B_0; \\ \eta_0 &= (\Lambda_0 - L_0)\cos\Phi_0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} d\xi_0 &= -dB_0; \\ d\eta_0 &= -dL_0\cos\Phi_0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Tinând seama de relaţiile (4.10), relaţiile (4.8) devin:

$$\xi_{L_i} = \xi^0_{L_i} + \frac{\partial B_{L_i}}{\partial B_0} d\xi_0 + \frac{\partial B_{L_i}}{\partial L_0}\sec\Phi_0 d\eta_0 - \frac{\partial B_{L_i}}{\partial A_0} dA_0 - \frac{\partial B_{L_i}}{\partial a} da - \frac{\partial B_{L_i}}{\partial f} df;$$

$$\eta_{L_i} = \eta^0_{L_i} + \frac{\partial L_{L_i}}{\partial B_0} cos\Phi_{L_i} d\xi_0 + \frac{\partial L_{L_i}}{\partial L_0}\frac{\cos\Phi_{L_i}}{\cos\Phi_0} d\eta_0 - \\ -\frac{\partial L_{L_i}}{\partial A_0}\cos\Phi_{L_i} dA_0 - \frac{\partial L_{L_i}}{\partial a}\cos\Phi_{L_i} da - \frac{\partial L_{L_i}}{\partial f}\cos\Phi_{L_i} df \quad (4.11)$$

Pentru determinarea celor cinci necunoscute $d\xi_0$, $d\eta_0$, dA_0, da, df sunt necesare minim 3 puncte Laplace în care se vor scrie , ecuațiile de forma (4.11), care vor fi rezolvate prin metoda celor mai mici pătrate în baza condiției :

$$[\xi^2 + \eta^2] \rightarrow \text{minim} \quad (4.12)$$

Metoda Helmert nu abordează poziționarea pe înălțime a elipsoidului, ea presupune o repartizare uniformă a punctelor geodezice pe suprafața considerată, fapt pentru care este cunoscută sub denumirea metoda suprafețelor.

Conform [12], la ecuațiile (4.11) și (4.12) specifice metodei Helmert se mai pot adăuga și alte ecuații, deduse din ecuația Laplace.

In determinări cu caracter tridimensional intervin trei translații spațiale ale elipsoidului în rapord cu geoidul, precum și modificări ale parametrilor elipsoidului folosit. De regulă se acceptă paralelismul dintre axele elipsoidului global și cele ale geoidului, iar necunoscutele problemei sunt: $d\xi_0$, $d\eta_0$, dN_0, da, df. Prezentarea în detaliu a acestor probleme se regăsește în Torje 1975, Dragomir ș.a.1977.

De menționat că modificările care apar în parametri care determimă datele geodezice fundamentale, conduc la modificarea coordonatelor geodezice ale tuturor punctelor din rețea, respectiv la modificarea componentelor deviațiilor verticalelor și a ondulațiilor geoidului în aceste puncte.

4.2.Clasificarea rețelelor geodezice

Clasificarea rețelelor geodezice poate fi făcută după mai multe criterii, care indică modul de rezolvare, numărul elementelor cunoscute și a elementelor determinate, destinația, forma și importanța rețelelor etc.

➢ **După modul de rezolvare rețelele geodezice**,se clasifică în:

-din punct de vedere: planimetric:

- ***rețele de triangulație***;
- ***rețele de trilaterație***;
- ***rețele poligonometrice***.

-din punct de vedere altimetric:

-rețele de nivelment geometric geodezic

De menționat că rețelele planimetrice sunt poziționate altimetric, în general, prin nivelment trigonometric , iar rețelele de nivelment geometric sunt poziționate planimetric, cu o precizie scăzută , având ca scop identificarea punctelor de nivelment.

➢ **După numărul elementelor cunoscute,** rețelele se clasifică în:

-Rețele geodezice libere. – nu conțin nici un element cunoscut, în acestea intervin doar observațiile instrumentale necesare determinării geometrice a rețelei.

Prezintă dezavantajul că nu pot fi încadrate într-un anumit sistem de coordonate.

- ***Rețele geodezice fără constrângeri*** – au un număr strict necesar de elemente pentru încadrarea acestora în sistemul de coordonate adoptat.

- ***Rețele geodezice constrânse*** - conțin un număr suplimentar de elemente, în raport de cele strict necesare și suficiente, pentru determinarea poziționării rețelei în sistemul de coordonate adoptat. Pe astfel de elemente urmează să se realizeze, prin procesul de prelucrare a măsurătorilor, constrângeri de natură geometrică și analitică.

➢ **Clasificarea după formă-** ia în considerare forma de prezentare a rețelei, astfel se întâlnesc:

- ***Rețele formate din lanțuri de triunghiuri și patrulatere*** (fig.4.2.). - dispuse în lungul meridianelor și paralelelor, la distanțe de circa 200 km, la intersecția lor existând puncte Laplace.

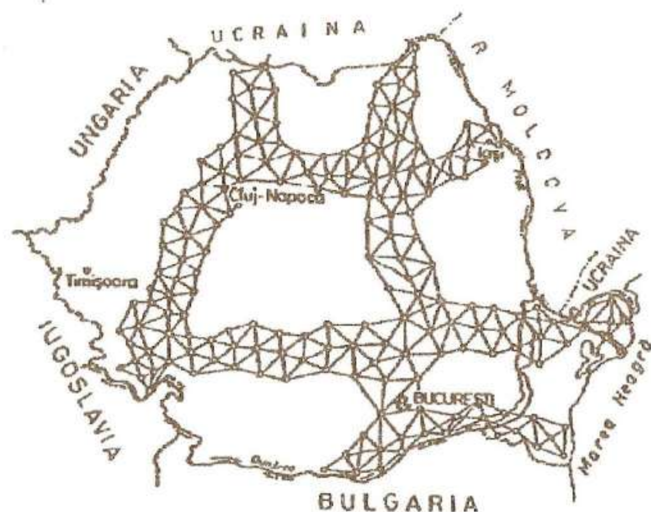


Fig.4.2.Rețele primordiale

De menționat că în rețeaua veche a României au existat trei lanțuri primordiale dispuse în lungul meridianelor și două lanțuri dispuse în lungul paralelelor, care făceau parte din lanțuri internaționale, fiind sprijinite pe 9 baze geodezice.

În interiorul lanțurilor primordiale de ordinul I se crea rețeaua de triangulație complementară de ordinul I, de îndesire, care era ulterior compensată, ca o triangulație constrânsă, pe elemente fixe ale lanțurilor primordiale, anterior și independent compensate.

Rețea compactă de triangulație (de suprafață)-(fig.4.3) acoperă integral teritoriul considerat, fără a se mai crea golurile existente în rețelele formate din lanțurile primordiale. Compensarea rețelelor compacte se realizează în bloc sau prin metode riguroase de compensare pe grupe de ecuații .



Fig.4.3. Rețea compactă

Actuala rețea de triangulație a țării noastre este o rețea compactă. Afirmația poate fi extinsă și asupra rețelei de nivelment care, deși este creată sub formă de poligoane, asigură acoperirea întregii suprafețe a țării în mod uniform. Rețeaua gravimetrică se realizează, de asemenea, sub forma unor poligoane.

- **Clasificarea după destinație**- ia în considerare arealul de dezvoltare a rețelelor geodezice, astfel se întâlnesc:

- ***Rețea geodezică internațională***. - creată pe teritoriul mai multor state, pe baza unor convenții și colaborări internaționale. Pe lângă scopurile științifice, de determinare a formei și dimensiunilor Pământului, rețelele internaționale sunt utilizate în scopuri cartografice, militare, economice etc.

- ***Rețea geodezică de stat***. -(fig.4.4) creată separat pentru triangulație și respectiv pentru nivelment, pe întreg teritoriul țării, constituie principala rețea de sprijin pentru toate lucrările topografice,fotogrammetrice și cartografice.

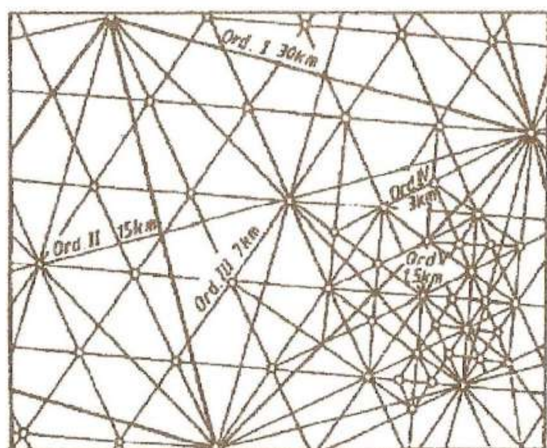


Fig.4.4. Reteaua geodezică de stat

Rețelele geodezice planimetrice sunt împărțite în rețele de diferite ordine, după lungimile laturilor ce unesc puncte geodezice apropiate. Astfel sunt cunoscute rețele geodezice de ordinul I, II, III, IV. In tabelul 4.1 sunt prezentate câteva caracteristici ale rețelelor geodezice .

Tabelul 4.1

Ordinul	Lungimea medie a laturii (km)	Lungimea minimă a laturii (km)	Marimea unghiurilor triunghiurilor	Neînchiderea pe triunghi
I	25-30	10	$>45^g$ (40^0)	8^{cc} (2,7")
II	15	7	$>33^g$ (30^0)	12.5^{cc} (3,7")
III	7	5,5	$>28^g$ (25^0)	19^{cc} (6")
IV	4	2	cel puțin 28^g (25^0)	$< 28^{cc}$ (8,6")

Rețelele de ordinul I ÷ III sunt denumite rețele de ordin superior de triangulație (fig.4.4.), iar cele de ordinal IVși V de ordin inferior. Aceste rețele au fost create de către Direcția topografică militară începând cu anul 1956.

Rețeaua de triangulație de stat a fost completată cu o rețea de îndesire de ord.V , ale cărei puncte au fost determinate nu numai prin metoda triangulației, ci și prin metodele trilaterației, poligonometriei, prin intersecții înainte și înapoi sau combinate.

Rețelele geodezice de nivelment sunt împărțite în rețele de nivelment geodezic de ordinul I, II, III, IV care diferă între ele prin lungimea traseelor sau poligoanelor închise din care sunt formate ,conform tabelului 4.2.

În mod similar cu rețelele planimetrice, rețeaua de nivelment de stat (fig.4.5) a fost, de asemenea, îndesită și completată până la ordinul V.

Tabelul 4.2

Ordinul	Lungimea traseului L (km)	Toleranța admisă [mm]
I	1500	± 2 mm $\sqrt{[L]_{km}}$
II	500-600	± 5 mm $\sqrt{[L]_{km}}$
III	150-200	± 10 mm $\sqrt{[L]_{km}}$
IV	50	± 20 mm $\sqrt{[L]_{km}}$
V	5-10	± 30 mm $\sqrt{[L]_{km}}$



Fig.4.5.Rețeaua de nivelment de ordinal I

Rețele geodezice locale- se utilizează pentru lucrări inginerești de amploare, cum ar fi marile complexe

hidroenergetice, bazinele miniere, complexele industriale etc., în cazul când, în zona de interes nu se găsesc puncte ale rețelei de stat. Uneori, precizia interioară a unor astfel de rețele este mai ridicată, în comparație cu precizia din rețeaua geodezică de stat. De aceea , în mod obișnuit, rețelele geodezice locale nu se constrâng, ci se realizează doar o încadrare în rețelele geodezice de stat corespondente.

➢ **După numărul de dimensiuni determinate ale spațiului în care este amplasată rețeua** – se pot distinge următoarele :

- ***Rețele geodezice unidimensionale*** – au doar o singură mărime determinată omogen, altitudinea. În această categorie de rețele geodezice se pot încadra rețelele de nivelment. Celelalte coordonate, atașate punctelor respective, au un rol de identificare, fiind determinate aproximativ.

- ***Rețele geodezice bidimensionale***. În aceste rețele punctele au determinate două coordonate într-un sistem unitar de referință: x, y în planul de proiecție sau B, L pe elipsoidul de referință. Aceste rețele se mai numesc și rețele planimetrice, deși în ultimul caz denumirea este improprie. Altitudinea este determinată separat, într-un sistem de coordonate unidimendional.

- ***Rețele geodezice tridimensionale***. -au determinate omogen și unitar toate cele trei coordonate care descriu poziția punctului într-un sistem cartezian de coordonate . Spre deosebire de rețelele prezentate anterior, acestea au o singură suprafață de referință – elipsoidul.

- ***Rețele geodezice în spațiu cu patru dimensiuni.*** –se referă la rețele geodezice care se determină în mod repetat la anumite intervale de timp. Timpul constituie cea de-a patra dimensiune.

4.3.Prelucrarea măsurătorilor geodezice

Principiile de prelucrare a măsurătorilor geodezice sunt cunoscute de la ***cursul de teoria de prelucrare a măsurătorilor geodezice***. De aceea, unele noţiuni sau algoritmi de calcul se presupune a fi cunoscute.

In vederea evaluării unor parametri, în Geodezie există o anumită metodologie, ce trebuie respectată, pentru obţinerea rezultatelor finale.

Baza metodologiei, o reprezeintă ***modelul matematic*** constituit din formularea relaţiei funcţionale dintre parametri necunoscuţi şi mărimile măsurate.

Prin ***model*** se înţelege o reprezentare simplificată a unui fenomen sau proces real.

In funcţie de natura variabilelor care intervin în model în Geodezie modelele se împart în două categorii principale, ***modelul funcţional*** şi ***modelul stochastic.***

La prelucrarea observaţiilor efectuate în reţele geodezice se pot utiliza mai multe modele funcţional-stochastice, dintre care cel mai cunoscut model este ***modelul Gauss-Markov***.

Prelucrarea observaţiilor efectuate într-o reţea geodezică se desfăşoară conform modelului funcţional-stochastic adoptat, reprezentat prin relaţiile:

$$v = Ax + l$$

$$C_m = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & r_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & r_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ r_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & r_{2n}\sigma_2\sigma_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}\sigma_n\sigma_1 & r_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \sigma_0^2 Q_m \quad (4.13)$$

în care:

σ_i^2 - varianţa teoretică a mărimilor măsurate (M_i^o);

r_{ij} - coeficient de corelaţie între măsurătorile

$$M_i^o \ si \ M_j^o \quad ; r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}; i, j = 1, 2, \dots, n$$

σ_{ij} - covarianţa teoretică între măsurătorile $M_i^o \ si \ M_j^o$

Prima ecuaţie din (4.13) reprezintă ***modelul funcţional***, nu conţine elemente aleatoare şi descrie o relaţie funcţională între mărimi, adică la o valoare dată a argumentului corespunde o valoare unică a funcţiei.

A doua ecuaţie din (4.13) reprezintă ***modelul stochastic*** sau ***statistic*** şi conţine variabile aleatoare, ce corespund efectului posibil al unor factori necontrolabili, care influenţează procesul modelat .Ecuaţia descrie o relaţie complexă între mărimi, adică la o valoare dată a argumentului corespunde un ansamblu de valori posibile ale funcţiei.

In modelul stochastic matricea „C_m" , de dimensiuni (n,n), reprezintă ***matricea de varianţă – covarianţă*** a măsurătorilor. Matricea „Q_m", de aceleaşi dimensiuni, reprezintă matricea cofactorilor măsurătorilor, iar σ_0^2 este o constantă denumită „varianţa unităţii de pondere" sau „factor de varianţă" şi este adimensională.

Elementele matricei cofactorilor se numesc cofactori sau coeficienţi de pondere, iar condiţia necesară şi suficientă ca matricea să fie independentă este ca toţi coeficienţii de pondere dreptunghiulari să fie nuli adică, $Q_{ij} = 0$; *pentru* $i \neq j$.

În continuare, se va prezenta metoda celor mai mici pătrate utilizată la rezolvarea reţelelor geodezice pentru cazul măsurătorilor indirecte, condiţionate şi indirecte supuse la condiţii.

4.3.1.Măsurători indirecte

Se cunoaşte faptul că, între mărimile măsurate direct şi mărimile care se obţin indirect, pot fi stabilite legături funcţionale ce pot fi liniare sau neliniare. In practica geodezică sunt frecvente cazurile când funcţiile de legătură sunt neliniare.

Pentru acestea forma generală de exprimare este:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \quad, x_k) &= l_1 \\ f_2(x_1, x_2, \quad, x_k) &= l_2 \\ &\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \quad, x_k) &= l_n \end{aligned} \qquad (4.14)$$

în care :

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ - necunoscute (mărimile care se determină);

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ - mărimile măsurate şi considerate fără erori.

Notăm cu $l_1^0, l_2^0, \ldots, l_n^0$ mărimile măsurate şi eronate, cum de altfel există practic întotdeauna şi avem :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) - l_1^0 &= v_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) - l_2^0 &= v_2 \\ &\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) - l_n^0 &= v_n \end{aligned} \qquad (4.15)$$

Este important de precizat că mărimile $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nu sunt independente, ci legate între ele prin relaţiile (4.15).

De asemenea, sistemul de ecuaţii (4.15) este format din atâtea ecuaţii câte mărimi măsurate există, iar numărul lor este mai mare decât numărul necunoscutelor, adică există întotdeauna $n > k$.

Exprimând necunoscutele "x_i" ,din (4.14), în funcţie de valorile aproximative x_i^0 şi corecţiile (creşterile) Δx_i se poate scrie:

$$x_i = x_i^o + \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k \qquad (4.16)$$

Introducând (4.16) în (4.14) se obţine:

$$f_i\,(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_k^0 + \Delta x_k) - l_i^0 = v_i \qquad (4.17)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Creşterile necunoscutelor fiind mici, funcţiile (4.17) pot fi dezvoltate în serie Taylor.Se reţin din dezvoltare termenii până la puterea întâi.

$$f_i\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)\Delta x_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)\Delta x_2 + \ldots$$
$$+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)\Delta x_k - l_i^0 = v_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.18)$$

Expresiile derivatelor se calculează pentru:

$$x_i = x_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots k).$$

Notând cu a_i, b_i,..., k_i (i=1, 2,...n) coeficienţii creşterilor Δx_1, Δx_2, ..., Δx_k şi cu $f_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0) - l_i^0 = l_i$ (i=1, 2,...n), sistemul (4.18) devine:

$$a_i \Delta x_1 + b_i \Delta x_2 + ... + k_i \Delta x_k + l_i = v_i \quad i = 1,2,...,n \qquad (4.19)$$

Sistemul de ecuaţii (4.19) reprezintă forma generală de definire a măsurătorilor indirecte şi poartă numele de sistemul ecuaţiilor de erori sau sistemul ecuaţiilor de corecţii.

In cazul funcţiilor liniare sistemul ecuaţiilor de erori se prezintă sub forma:

$$a_i x_1 + b_i x_2 + ... + k_i x_k + l_i = v_i \quad i = 1,2,...,n \qquad (4.20)$$

Pentru a rezolva cu uşurinţă sistemul se înlocuiesc necunoscutele "x_i" cu expresiile sistemului (4.16), ceea ce conduce la un sistem de ecuaţii de forma (4.19).

Datorită erorilor inerente ce apar la măsurare, valorile mărimilor măsurate nu sunt cele reale (adevărate).Erorile acestor mărimi dau erorile ecuaţiilor de corecţii.

Se cunoaşte că la măsurătorile directe de precizii diferite, expresiile de calcul ale ponderilor sunt date de relaţia:

$$p_i = \left(\frac{m_0}{m_i}\right)^2 \quad i = 1,2,...,n \qquad (4.21)$$

sau:

$$p_i = \frac{1}{m_i^2} \quad i = 1,2,...,n \qquad (4.22)$$

unde:

m_0-eroarea medie pătratică a unităţii de pondere.

Se poate trage concluzia că, ponderile ecuaţiilor de erori sunt date de ponderile mărimilor măsurate, sau de ponderile termenilor liberi.

In funcţie de erorile ce apar, respectiv de ponderile ecuaţiilor de erori, măsurătorile indirecte sunt de aceeaşi precizie sau de precizii diferite.

4.3.2.Măsurători indirecte de aceeaşi precizie

Considerând sistemul ecuaţiilor de erori alcătuit din "n" ecuaţii cu trei `necunoscute, de forma:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + l_1 &= v_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + l_2 &= v_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_n x_1 + b_n x_2 + c_n x_3 + l_n &= v_n, \end{aligned} \qquad (4.23)$$

sistemul poate fi scris:

$$a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + l_i = v_i \quad i = 1,2,...,n \qquad (4.24)$$

Algebric sistemul este nedeterminat, întrucât conţine n+3 necunoscute (mărimile care se determină x_1, x_2, x_3 şi erorile aparente v_1, v_2, ... v_n) faţă de "n" ecuaţii.

4.3.2.1.Stabilirea sistemului normal de ecuaţii

Rezolvarea sistemului (4.23) este posibilă în condiţia de minim:

$$[vv] = minim \tag{4.25}$$

Erorile aparente $v_1, v_2, \ldots v_n$ sunt funcţii de necunoscutele x_1, x_2, x_3, deci se poate scrie:

$$F(x_1, x_1, x_1) = v_1^2 + v_2^2 + \ldots v_n^2 = (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + l_1)^2 +$$
$$+(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + l_2)^2 + \ldots + (a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 + l_n)^2 \tag{4.26}$$
$$= minim$$

Se cunoaşte că extremul unei funcţii se obţine pentru valorile variabilelor care anulează derivatele parţiale ale funcţiei în raport cu acestea:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0; \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0; \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0; \tag{4.27}$$

Efectuând derivatele parţiale ale funcţiei (4.26) şi grupând termenii după necunoscutele "x_1", "x_2", "x_3", se obţine sistemul normal de ecuaţii, care se prezintă sub forma:

$$\begin{aligned}
&[aa]x_1 + [ab]x_2 + [ac]x_3 + [al] = 0\\
&[ab]x_1 + [bb]x_2 + [bc]x_3 + [bl] = 0\\
&[ac]x_1 + [bc]x_2 + [cc]x_3 + [cl] = 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Datorită simetriei coeficienţilor necunoscutelor faţă de diagonala principală, sistemul se mai poate scrie:

$$\begin{aligned}
[aa]x_1 + [ab]x_2 + [ac]x_3 + [al] &= 0\\
[bb]x_2 + [bc]x_3 + [bl] &= 0\\
[cc]x_3 + [cl] &= 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

4.3.2.2.Calculul coeficienţilor ecuaţiilor normale

Pentru calculul coeficienţilor ecuaţiilor normale se utilizează coeficienţii şi termenii liberi din sistemul ecuaţiilor de erori (4.24).

Metodologia care se utilizează urmăreşte ca valorile care se obţin pentru coeficienţii şi termenii liberi din sistemul ecuaţiilor normale să fie corecte, fapt pentru care se impune introducerea unor relaţii de control, astfel din (4.24) se calculează:

$$a_i + b_i + c_i + l_i = s_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.30}$$

Adunând pe coloane termenii din egalităţile (4.30) rezultă:

$$[a] + [b] + c] + [l] = [s] \tag{4.31}$$

Inmulţind succesiv relaţiile (4.30) cu a_i, b_i, c_i, l_i, s_i şi adunând pe coloane se obţin relaţiile de control:

$$
\begin{aligned}
&[aa]+[ab]+[ac]+[al]=[as]\\
&[ab]+[bb]+[bc]+[bl]=[bs]\\
&[ac]+[bc]+[cc]+[cl]=[cs]\\
&[al]+[bl]+[cl]+[ll]=[ls]\\
&[as]+[bs]+[cs]+[ls]=[ss]
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

Calculul coeficienților se realizează cu ajutorul unor tabele, întocmite în utilitare de calcul tabelar (Excel, Lotus 1 2 3, Works, Pardox etc).

Se va prezenta în continuare schema redusă de calcul a coeficienților ecuațiilor normale.

Astfel:

- în coloana 1 se introduce numărul curent al ecuațiilor;
- în coloanele 2,3,4 se trec coeficienții necunoscutelor;
- în coloana 5 se trec termenii liberi;
- în coloana 6 se face controlul (4.30);
- în partea de jos a tabelului se realizează controlul (4.31), după care urmează calculul coeficienților ecuațiilor normale:

Coeficienții ecuațiilor normale se obțin aplicând funcția ***sumproduct***.

Astfel, pentru coeficienții primei ecuații normale se aplică "**sumproduct**" între coloana coeficienților "a" , de la 1 la "n" (coloană luată ca fixă) deînmulțită cu aceeași coloană. Prin acționarea tastei "**enter**" se obține [aa].

Se copiază formulele spre dreapta până la coloana sumă (s), obținând coeficienții [ab],[ac],[al], [as]. Se procedează în mod similar și pentru celelalte ecuații.

De menționat, că pentru a obține o celulă sau coloană fixă, în utilitarul Excel, se acționează tasta F4.

Tabel 4.3

Nr.crt.	a	b	c	l	s
1	a_1	b_1	c_1	l_1	s_1
2	a_2	b_2	c_2	l_2	s_2
3	a_3	b_3	c_3	l_3	s_3
.	.	.	.	.	.
n	a_n	b_n	c_n	l_n	s_n
[ ]	[a]	[b]	[c]	[l]	[s]
	[aa]	[ab]	[ac]	[al]	[as]
		[bb]	[bc]	[bl]	[bs]
			[cc]	[cl]	[cs]
				[ll]	[ls]
					[ss]

Având în vedere că, în sistemul normal de ecuații numărul necunoscutelor este egal cu numărul ecuțiilor, sistemul este compatibil bine determinat.

Rezolvarea sistemului de ecuații normale se realizează prin mai multe metode printre care amintim:

- metoda reducerii successive (Gauss-Doolittle);
- metoda matriceală;
- metoda aproximațiilor succesive;
- metoda Seidel;
- metoda relaxării;
- metoda eliminării parțiale.

Din metodele enumerate se vor prezenta în continuare metoda Gauss-Doolittle și metoda matriceală.

4.3.2.3. Rezolvarea sistemului de ecuații normale prin metoda Gauss-Doolittle

Tabelul 4.4

	a]	b]	c]	l]	S]	Rând
[a	[aa]	[ab]	[ac]	$[al]$	[as]0	1
	-1	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[aS]}{[aa]}$	2
x_1		[bb]	[bc]	[bl]	[bS]	3
		$-\frac{[ab][ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ab][ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ab][al]}{[aa]}$	$-\frac{[ab][aS]}{[aa]}$	4
		[bb.1]	[bc.1]	$[bl.1]$	[bS.1]	5
		-1	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bS.1]}{[bb.1]}$	6
	x_2=		[cc]	$[cl]$	[cS]	7
			$-\frac{[ac][ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ac][al]}{[aa]}$	$-\frac{[ac][aS]}{[aa]}$	8
			$-\frac{[bc.1][bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bc.1][bS.1]}{[bb.1]}$	9
			[cc.2]	$[cl.2]$	[cS.2]	10
			-1	$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$	$-\frac{[cS.2]}{[cc.2]}$	11
		x_3=		$[ll]$	$[ls]$	12
				$-\frac{[al][al]}{[aa]}$	$-\frac{[al][as]}{[aa]}$	13
				$-\frac{[bl.1][bl.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bl.1][bs.1]}{[bb.1]}$	14
				$-\frac{[cl.2][cl.2]}{[cc.2]}$	$-\frac{[cl.2][cs.2]}{[cc.2]}$	15
			[vv]=	$[ll.3]$	$[ls.3]$	16

Modul de lucru, pe linii, cu schema triunghiulară Gauss-Doolittle se realizează după cum urmează :

- In rândul 1 se introduc coeficienții, termenul liber și suma acestora din prima ecuație normală.
- Rândul 2 se obține împărțind elementele rândului 1 la primul coeficient ([aa]) luat cu semn schimbat. Linia se înregistrează cu roșu și reprezintă prima ecuație eliminatorie din care va rezulta necunoscuta "x_1".
- In rândul 3 se introduc coeficienții celei de-a doua ecuații normale și suma acestora.
- Rândul 4 se obține- înmulțind elementul din rândul 2 (linia roșie), coloana b] cu fiecare element din rândul 1, începând cu coloana b] spre dreapta.
- Rândul 5 se obține prin adunarea pe coloane, a elementelor din rândurile 3 și 4.
- Rândul 6 se obține prin împărțirea rândului 5 la primul element ([bb]) luat cu semn schimbat. Această linie reprezintă a doua ecuație eliminatorie din care rezultă "x_2" și se înregistrează cu roșu.
- In rândul 7 se trec coeficienții celei de-a treia ecuații normale și suma acestora.
- Rândul 8 se obține- înmulțind elementul din rândul 2 (linia roșie), coloana c] cu fiecare element din rândul 1, începând cu coloana c] spre dreapta.
- Rândul 9 se obține înmulțind elementul din rândul 6 (linia roșie), coloana c] cu fiecare element din rândul 5, începând cu coloana c] spre dreapta.
- Rândul 10 se obține prin adunarea pe coloane, a elementelor din rândul 7, 8 și 9.
- Rândul 11 se obține prin împărțirea rândului 10 la primul element ([cc]) luat cu semn schimbat. Această linie reprezintă a treia ecuație eliminatorie din care rezultă "x_3" și se înregistrează cu roșu.
- In rândul 12, pe coloana termenilor liberi, se trece [ll]

- Rândul 13 se obține prin înmulțirea elementului situat pe coloana termenului liber din prima ecuație eliminatorie (rândul 2), cu cea de deasupra.
- Rândul 14 se obține prin înmulțirea elementului situat pe coloana termenului liber din cea de a doua ecuație eliminatorie (rândul 6), cu cea de deasupra.
- Rândul 15 se obține prin înmulțirea elementului situat pe coloana termenului liber din cea de a treia ecuație eliminatorie (rândul 11), cu cea de deasupra.
- Insumând pe coloane rândurile 12, 13, 14, 15 se obține [*ll.3*] care este egal cu [*ls*] şi care reprezintă chiar [vv].

In tabelul 4.5 se poate urmării modul de calcul al necunoscutelor.Se remarcă faptul că necunoscuta "x_3", rezultă din ecuația eliminatorie 3. Se introduce "x_3" în ecuația eliminatorie 2 şi rezultă "x_2", după care, "x_2" şi "x_3" se intoduc în ecuația eliminatorie 1 şi rezultă "x_1".

Tabelul 4.5.

		$x_3=$	$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$
	$x_2=$	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]} * x_3$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$
$x_1=$	$-\frac{[ab]}{[aa]} * x_2$	$-\frac{[ac]}{[aa]} * x_3$	$-\frac{[al]}{[aa]}$

Tot din schema Gauss rezultă [vv] ca algoritm al termenului liber redus de trei ori, valoare ce se va utiliza la calculul ***erorii medii pătratice "m_0"*** (abaterea standard) dată de relația (4.33):

$$m_0 = \mp\sqrt{\frac{[vv]}{n-k}} = \mp\sqrt{\frac{[ll.3]}{n-3}} \qquad (4.33)$$

unde: n - numărul de ecuații;
k - numărul de necunoscute

$$[ll.3] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl]^2}{[bb.1]} - \frac{[cl]^2}{[cc.2]} \qquad (4.34)$$

Erorile necunoscutelor se calculează cu relațiile:

$$m_{x_1} = \pm m_0\sqrt{Q_{11}}; m_{x_2} = \pm m_0\sqrt{Q_{22}};$$
$$m_3 = \pm m_0\sqrt{Q_{33}}; m_{FF} = \pm m_0\sqrt{Q_{FF}} \qquad (4.35)$$

Coeficienții de pondere "Q_{ii}".se calculează în trei coloane ataşate schemei Gauss, de unde rezultă:

$$Q_{11} = \frac{1}{[aa]} + \frac{S_1^2}{[bb.1]} + \frac{S_2^2}{[cc.2]}; Q_{22} = \frac{1}{[bb.1]} + \frac{R_1^2}{[cc.2]}; Q_{33} = \frac{1}{[cc.2]}$$
$$Q_{FF} = \frac{A_1^2}{[aa]} + \frac{[A_2.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[A_3.2]^2}{[cc.2]} \qquad (4.36)$$

De menționat că vectorii termenilor liberi pentru cei trei coeficienți de pondere au valorile (-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1), iar modul de lucru în coloanele ataşate este similar cu modul de lucru din celelalte coloane.

Din relațiile (4.35) şi (4.21) rezultă semnificația mărimilor "Q_{ii}".:

$$\frac{1}{Q_{ii}} = \left(\frac{m_0}{m_{x_i}}\right)^2 = p_{x_i}; \quad i = 1,2,3,F \qquad (4.37)$$

Se poate trage concluzia că inversa mărimilor "Q_{ii}" defineşte ponderile mărimilor obținute indirect "x_i", motiv pentru care Q_{ii} (i=1,2,3), se mai numesc coeficienți de pondere.

	a]	b]	c]	l]	S]	Q_{11}	Q_2 2	Q_{33}	Q_{FF}	Rând
[a	[aa]	[ab]	[ac]	[al]	[as]0	-1	0	0	A_1	1
	-1	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[aS]}{[aa]}$	$\frac{1}{[aa]}$	0	0	$-\frac{A_1}{[aa]}$	2
x_1		[bb]	[bc]	[bl]	[bs]	0	-1	0	A_2	3
		$-\frac{[ab][ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ab][ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ab][al]}{[aa]}$	$-\frac{[ab][aS]}{[aa]}$	$\frac{[ab]}{[aa]} = S_1$	0	0	$-\frac{[ab]}{[aa]} A_1$	4
		[bb.1]	[bc.1]	[bl.1]	[bs.1]	S_1	-1	0	$[A_2.1]$	5
		-1	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bS.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{S_1}{[bb.1]}$	$\frac{1}{[bb.1]}$	0	$-\frac{[A_2.1]}{[bb.1]}$	6
	X_2=		[cc]	[cl]	[cS]	0	0	-1	A_3	7
			$-\frac{[ac][ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ac][al]}{[aa]}$	$-\frac{[ac][aS]}{[aa]}$	$\frac{[ac]}{[aa]}$	0	0	$\frac{[ac]}{[aa]} A_1$	8
			$-\frac{[bc.1][bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bc.1][bS.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]} S_1$	$\frac{[bc.1]}{[bb.1]} = R$	0	$\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[A_2.1]$	9
			[cc.2]	[cl.2]	[cs.2]	S_2	R_1	-1	$[A_3.2]$	10
			-1	$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$	$-\frac{[cS.2]}{[cc.2]}$	$-\frac{S_2}{[cc.2]}$	$-\frac{R_1}{[cc.2]}$	$\frac{R_1}{[cc.2]}$	$-\frac{[A_3.2]}{[cc.2]}$	11
		x_3=				Q_{11}=	Q_{22}=	Q_{33}=	Q_{FF}=	12

4.3.2.4. Rezolvarea matricială a sistemului ecuațiilor de erori

Se consideră sistemul ecuațiilor de erori de formă liniară, compus din „n" ecuații cu „h" necunoscute:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + h_1x_h - l_1 \\ v_2 &= a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots + h_2x_h - l_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots + h_nx_h - l_n \end{aligned} \tag{4.38}$$

$n > h$

Matricial sistemul (4.38) se poate scrie

$$v = Ax - l \tag{4.39}$$

unde:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ v_n \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \ldots, & h_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots, & h_2 \\ . & . & \ldots & . \\ a_n & b_n & \ldots & h_n \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}; \quad l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ . \\ l_n \end{pmatrix}; \tag{4.40}$$

Principiul micilor pătrate în scrierea matricială este :

$$F = v^T v = \text{minim} \tag{4.41}$$

unde:

v^T - este transpusă matricei „v" din (4.39).

Inlocuim relația matricială (4.39) în (4.41) şi obținem :

$$F = v^T v = (x^T A^T - l^T)(Ax - l) = x^T A^T Ax - 2x^T A^T l + l^T l = \text{minim} \quad (4.42)$$

unde:

x^T, A^T, l^T - transpusele matricilor din (4.40).

Condiția de minim a funcției (4.41) este îndeplinită atunci când derivatele funcției în raport cu „x" sunt egale cu zero:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4.43)$$

Prin derivare rezultă ***sistemul ecuațiilor normale***:

$$A^T Ax - A^T l = 0 \quad (4.44)$$

de unde rezultă ***necunoscutele sistemului*** :

$$x = (A^T A)^{-1} A^T l \quad (4.45)$$

în care:

$(A^T A)^{-1}$ - inversa matricii $A^T A$

Se cunoaşte că ***eroarea medie pătratică a unei singure măsurători*** se determină cu relația (4.33), în care se pune problema calculării prin metoda matriceală a expresiei [vv].

In acest sens se va scrie expresia matriceală a sistemului ecuațiilor de erori (4.39) şi transpusa acestuia(4.39') :

$$\begin{aligned} v &= Ax - l \\ v^T &= x^T A^T - l^T \end{aligned} \quad (4.39`)$$

Cu aceste egalități expresia matriceală a principiului micilor pătrate, ce se regăseşte în (4.42), se scrie (4.42'):

$$\begin{aligned} v^T v &= (x^T A^T - l^T)(Ax - l) = x^T A^T Ax - l^T Ax - x^T A^T l + l^T l = \\ &= x^T A^T Ax - 2x^T A^T l + l^T l \end{aligned} \quad (4.42`)$$

Observație:

Expresiile care se repetă au fost notate cu prim ("'").

Luând în considerare expresia matriceală a necunoscutelor (4.44) şi a coeficienților de pondere $Q_{xx}=(A^T A)^{-1}$, se poate scrie:

$$x = Q_{xx} A^T l \quad (4.46)$$

de unde:

$$x^T = l^T A Q_{xx} \quad (4.47)$$

Inlocuind (4.47) în (4.42`)se obține:

$$\begin{aligned} v^T v &= l^T AQ_{xx}A^T AQ_{xx}A^T l - 2l^T AQ_{xx}A^T l + l^T l = \\ &= l^T AQ_{xx}A^T l - 2l^T AQ_{xx}A^T l + l^T l = l^T l - l^T AQ_{xx}A^T l = \\ &= l^T (E - AQ_{xx}A^T) l \end{aligned} \quad (4.48)$$

unde:

E- matricea diagonală unitate

4.3.2.5. Exprimarea matriceală a coeficienților de pondere

Cunoscând expresia erorii unei funcții pentru cazul general [6]:

$$m_x^2 = C_1^2 m_1^2 + C_2^2 m_2^2 + ... + C_n^2 m_n^2 \quad (4.49)$$

sau:

$$m_x = \sqrt{C^2 m^2} \quad (4.50)$$

In scriere matriceală relația (4.50) se prezintă sub forma:

$$m_x = \sqrt{C^T m^2 C} \quad (4.51)$$

în care:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ . \\ C_n \end{pmatrix}; \quad m^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 & . & . & . \\ . & m_2^2 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & m_n^2 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Tinând seama de (4.21), (4.22), relația (4.51) se poate scrie sub forma:

$$\frac{1}{p_x} = C^T p^{-1} C \quad (4.53)$$

unde:

p -matricea diagonală a ponderilor:
p^{-1} -inversa matricii "p".

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & p_1 \end{pmatrix}; \quad p^{-1} = \begin{pmatrix} p_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1^{-1} & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & p_1^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Tinând seama de cele prezentate și revenind la matricea necunoscutelor sistemului ecuațiilor de erori (corecții) (4.45), se remarcă faptul că aceasta este o funcție de matricea termenilor liberi "l", ale căror elemente sunt mărimi măsurate direct și independente.

In consecință se poate aplica relația (4.54) în care ponderile sunt egale cu unitatea și avem:

$$Q_{xx} = (A^T A)^{-1} A^T [(A^T A)^{-1} A^T]^T = \\ = (A^T A)^{-1} A^T A (A^T A)^{-1} = (A^T A)^{-1} \quad (4.55)$$

In funcție de (4.55) se poate scrie:

$$Q_{xx}^{-1} = (A^T A) \quad (4.56)$$

unde :

Q_{xx} –matricea coeficienților de pondere , coeficienți corespunzători mărimilor obținute indirect.

Pentru determinarea ***coeficientului de pondere al unei funcții, se consideră funcția:***

$$F = f_0 + f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_k x_k \quad (4.57)$$

în care:

$x_1, x_2, \ldots, x_k$- mărimi obținute prin măsurători indirecte;
$f_1, f_2, \ldots, f_k$- coeficienți constanți.

Matricial funcția se scrie:

$$F = f_0 + f^T x \quad (4.58)$$

în care:

$$f^T = (f_1, f_2, ..., f_k) \quad (4.59)$$

Luînd în considerare expresiile (4.45) și (4.55) putem scrie:

$$x = Q_{xx} A^T l \quad (4.60)$$

Cu expresia (4.56) funcția (4.57) devine:

$$F = f_0 + f^T Q_{xx} A^T l \quad (4.61)$$

Se obsearvă că funcția (4.58) realizează trecerea de la variabilele dependente $x_1, x_2, \ldots, x_k$ la variabile independente l_1, $l_2, \ldots, l_k$ și în consecință se poate aplica formula:

$$Q_{FF} = f^T Q_{xx} A^T A Q_{xx} f \quad (4.62)$$

sau ținând seama de 4.53, rezultă:

$$Q_{FF} = f^T Q_{xx} f \quad (4.63)$$

Coeficienții de pondere stabiliți cu relațiile (4.53) și (4.63) sunt utilizați la calculul erorilor medii pătratice ale mărimilor obținute indirect și a erorii unei funcții de aceste mărimi.

4.3.3.Măsurători indirecte de precizii diferite

In cazul când erorile ecuațiilor sau ponderile lor sunt diferite, măsurătorile indirecte sunt de precizii diferite.

Considerând ponderile ecuaţiilor din sistemul ecuaţiilor de erori ca fiind $p_1, p_2, \ldots, p_n$, condiţia de minim ataşată sistemului de ecuaţii,va avea forma:

$$[pvv] = minim \qquad (4.64)$$

Considerând erorile aparente ca funcţii de mărimile ce se determină se poate scrie:

$$F(x_1, x_2, x_3) = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \ldots + p_nv_n^2 =$$
$$p_1(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + l_1)^2 + p_2(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + l_1)^2 + (4.65)$$
$$+ \ldots p_n(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + l_2)^2 = minim$$

Derivând parţial funcţia (4.61) în raport cu x_1; x_2; x_3 şi egalând cu zero se obţine sistemul ecuaţiilor normale pentru cazul măsurătorilor indirecte de precizii diferite.

$$\begin{aligned} &[paa]x_1 + [pab]x_2 + [pac]x_3 + [pal] = 0 \\ &[pab]x_1 + [pbb]x_2 + [pbc]x_3 + [pbl] = 0 \\ &[pac]x_1 + [pbc]x_2 + [pcc]x_3 + [pcl] = 0 \end{aligned} \qquad (4.66)$$

Calculul coeficienţilor necunoscutelor şi termenii liberi din sistemul ecuaţiilor normale (4.61) se efectuează în mod similar ca şi în cazul măsurătorilor indirecte de aceeaşi precizie, cu deosebirea că în schemele de calcul apare o coloană în plus, cea a ponderilor.

Relaţiile de control ale coeficienţilor ecuaţiilor normale au forma:

$$[a]+[b]+c]+[l]=[s]$$

$$\begin{aligned} &[paa]+[pab]+[pac]+[pal]=[pas] \\ &[pab]+[pbb]+[pbc]+[pbl]=[pbs] \\ &[pac]+[pbc]+[pcc]+[pcl]=[pcs] \\ &[pal]+[pbl]+[pcl]+[pll]=[pls] \\ &[pas]+[pbs]+[pcs]+[pls]=[pss] \end{aligned} \qquad (4.67)$$

Tabelul 4.7

Nr.crt.	p	a	b	c	l	s
1	p_1	a_1	b_1	c_1	l_1	s_1
2	p_2	a_2	b_2	c_2	l_2	s_2
3	p_3	a_3	b_3	c_3	l_3	s_3
.		.	.	.	.	.
n	p_n	a_n	b_n	c_n	l_n	s_n
[ ]	[p]	[a]	[b]	[c]	[l]	[s]
		[paa]	[pab]	[pac]	[pal]	[pas]
			[pbb]	[pbc]	[pbl]	[pbs]
				[pcc]	[pcl]	[pcs]
					[pll]	[pls]
						[pss]

In tabelul 4.7. se prezintă schema redusă de calcul a coeficienţilor şi termenilor liberi.Calculul coeficienţilor ecuaţiilor normale se realizează cu ajutorul aceleaşi funcţii SUMPRODUCT, dar în acest caz, la efectuarea produselor , apare coloană în plus cu ponderile ecuaţiilor de erori.

Rezolvarea sistemului de ecuații normale se realizează prin mai multe metode, dintre care se va prezenta, în continuare, metoda reducerilor successive și metoda matriceală.

Din sistemul ecuațiilor normale (4.66) se exprimă, în prima ecuație, necunoscuta "x_1" în funcție de celelalte necunoscute și se obține:

$$x_1 = -\frac{[pab]}{[paa]}x_2 - \frac{[pac]}{[paa]}x_3 - \frac{[pal]}{[paa]} \qquad (4.68)$$

Se introduce expresia lui "x_1" în celelalte ecuații și se grupează termenii după celelalte necunoscute:

$$\left\{[pbb] - \frac{[pab][pab]}{[paa]}\right\}x_2 + \left\{[pbc] - \frac{[pab][pac]}{[paa]}\right\}x_3 + \left\{[pbl] - \frac{[pab][pal]}{[paa]}\right\} = 0$$

$$\left\{[pbb] - \frac{[pab][pab]}{[paa]}\right\}x_2 + \left\{[pbc] - \frac{[pab][pac]}{[paa]}\right\}x_3 + \left\{[pbl] - \frac{[pab][pal]}{[paa]}\right\} = 0 \qquad (4.69)$$

Se introduc algoritmii lui Gauss (termenii din acolade) după reducerea necunoscutei "x_1" și astfel rezultă:

$$[pbb.1]x_2 + [pbc.1]x_3 + [pbl.1] = 0$$
$$[pbc.1]x_2 + [pcc.1]x_3 + [pcl.1] = 0 \qquad (4.70)$$

In continuare se exprimă necunoscuta "x_2" în funcție de "x_3" și se introduce în cea de-a doua ecuație a sistemului (4.70):

$$x_2 = -\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}x_3 - \frac{[pbl.1]}{[pbb.1]} \qquad (4.71)$$

$$\left\{[pcc.1] - \frac{[pbc.1][pbc.1]}{[pbb.1]}\right\}x_3 + \left\{[pcl.1] - \frac{[pbc.1][pbl.1]}{[pbb.1]}\right\} = 0 \qquad (4.72)$$

Se introduc algoritmii lui Gauss reduși de două ori ,în funcție de care relația (4.72) devine:

$$[pcc.2]x_3 + [pcl.2] = 0 \qquad (4.73)$$

$$x_3 = -\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]} \qquad (4.74)$$

Celelalte necunoscute se obțin în ordine inversă, prin introducerea relației (4.74) în (4.71) ,rezultă "x_2", iar apoi prin introducerea necunoscutelor "x_2", "x_3" în (4.68) rezultă "x_1".

Rezolvarea sistemului de ecuații normale se realizează în schema triunghiulară Gauss-Doolittle:

Tabelul 4.8

	a]	b]	c]	*l*]	S]	Rând
[a	[paa]	[pab]	[pac]	[p*al*]	[pas]0	1
	-1	$-\frac{[pab]}{[paa]}$	$-\frac{[pac]}{[paa]}$	$-\frac{[pal]}{[paa]}$	$-\frac{[pas]}{[paa]}$	2
x_1		[pbb]	[pbc]	[pbl]	[pbs]	3
		$\frac{[pab][pac]}{[paa]}$	$\frac{[pab][pac]}{[paa]}$	$\frac{[pab][pal]}{[paa]}$	$\frac{[pab][pas]}{[paa]}$	4
		[pbb.1]	[pbc.1]	[p*bl.1*]	[pbs.1]	5
		-1	$-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}$	$-\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]}$	$-\frac{[pbs.1]}{[pbb.1]}$	6
	x_2=		[pcc]	[pc*l*]	[pcs]	7

			$\frac{[pac][pac]}{[paa]}$	$\frac{[pac][pal]}{[paa]}$	$\frac{[pac][paS]}{[paa]}$	8
			$\frac{[pbc.1][pbc.1]}{[pbb.1]}$	$\frac{[pbc.1][pbl.1]}{[pbb.1]}$	$\frac{[pbc.1][pbs.1]}{[pbb.1]}$	9
			[pcc.2]	[pc*l*.2]	[pcs.2]	10
			-1	$-\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}$	$-\frac{[pcS.2]}{[pcc.2]}$	11
		x_3=		[p*ll*]	[p*ls*]	12
				$-\frac{[pal][pal]}{[paa]}$	$-\frac{[pal][pas]}{[paa]}$	13
				$\frac{[pbl.1][pbl.1]}{[pbb.1]}$	$\frac{[pbl.1][pbs.1]}{[pbb.1]}$	14
				$\frac{[pcl.2][pcl.2]}{[pcc.2]}$	$\frac{[pcl.2][pcs.2]}{[pcc.2]}$	15
			[pvv]=	[p*ll*.3]=	[p*ls*.3]	16

Schema Gauss oferă, pe lângă o rezolvare simplă a sistemului normal de ecuații un control periodic. Astfel se execută un control facultativ în liniile 2, 6, 11:

$$-1-\frac{[pab]}{[paa]}-\frac{[pac]}{[paa]}-\frac{[pal]}{[paa]}=-\frac{[pas]}{[paa]}$$

$$-1-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}-\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]}=-\frac{[pbs.1]}{[pbb.1]} \qquad (4.75)$$

$$-1-\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}=-\frac{[pcs.2]}{[pcc.2]}$$

şi un control obligatoriu în liniile 5, 10:

$$[pbb.1]+[pbc.1]+[pbl.1]=[pbs.1]$$

$$[pcc.2]+[pcl.2]=[pcs.2] \qquad (4.76)$$

Pentru verificarea necunoscutelor se foloseşte relaţia:

$$[pal]x_1+[pbl]x_2+[pcl]x_3+[pll]=[pll.3]=[pls.3] \qquad (4.77)$$

Eroarea medie pătratică a unei singure măsurători în cazul măsurătorilor indirecte de aceeaşi precizie, denumită şi eroarea unităţii de pondere se calculează cu relaţia:

$$m_0=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}}=\pm\sqrt{\frac{[pll.k]}{n-k}} \qquad (4.78)$$

In cazul calculării sistemului normal de ecuaţii (corecţii) prin metoda reducerilor succesive există egalitatea:

$$[pvv]=[pll.k] \qquad (4.79)$$

unde :

k –numărul reducerilor egal cu numărul necunoscutelor

Erorile necunoscutelor se calculează cu relaţiile similare cu cele din (4.35), în care coeficienţii de pondere se calculează cu relaţiile:

$$Q_{11}=\frac{1}{[paa]}+\frac{S_1^2}{[pbb.1]}+\frac{S_2^2}{[pcc.2]}$$
$$Q_{22}=\frac{1}{[pbb.1]}+\frac{R_1^2}{[pcc.2]} \qquad (4.80)$$
$$Q_{33}=\frac{1}{[pcc.2]}$$

Eroarea medie pătratică a unei funcţii de mărimi măsurate indirect şi de precizii diferite, se calculează în mod similar cu relaţia (4.35), în care coeficientul de pondere a funcţiei se calculează într-o coloană ataşată schemei Gauss şi este dat de relaţia:

$$Q_{FF}=\frac{A_1^2}{[paa]}+\frac{[A_2.1]^2}{[pbb.1]}+\frac{[A_3.2]^2}{[pcc.2]} \qquad (4.81)$$

4.3.3.1.Metoda matriceală

Sistemul ecuaţiilor de erori în cazul măsurătorilor indirecte de precizii diferite se prezintă sub forma:

$$v_i=a_ix_1+b_ix_2+...+h_ix_h-l_i; de\ pondere \quad p_i \qquad i=1,2,...,n \qquad (4.82)$$

Prezentat sub formă matriceală, sistemul ecuaţiilor de erori devine:

v= (Ax-l) de pondere p (4.83)

Intrucât elementele matricei "*l*" au erori diferite, ecuaţiile sistemului au erori diferite, ceea ce duce la un sistem de ponderi diferite.

In relaţia (4.83), "p" –reprezintă matricea diagonală:

$$p=\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{pmatrix}; \qquad (4.84)$$

iar celelalte matrici se prezintă sub forma:

$$v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ v_n \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & ..., & h_1 \\ a_2 & b_2 & ..., & h_2 \\ . & . & ... & . \\ a_n & b_n & ... & h_n \end{pmatrix}; \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}; \quad l=\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ . \\ l_n \end{pmatrix}; \qquad (4.85)$$

Aplicând principiul micilor pătrate , se poate scrie:

$$F=[pvv]=v^T pv=minim \qquad (4.86)$$

Dacă se ţine seama de expresia (4.83) se poate scrie:

$$F=(x^T A^T - l^T)\, p\, (Ax-l)=x^T A^T pAx-2x^T A^T pl-l^T pl=\min im \qquad (4.87)$$

Derivând funcţia obţinem:

$$A^T pAx - A^T pl = 0 \qquad (4.88)$$

de unde rezultă:

$$x = \left(A^T pA\right)^{-1} A^T pl \qquad (4.89)$$

Pentru a calcula eroarea medie pătratică a unităţii de pondere în mod matriceal, în relaţia (4.78) se exprimă termenul [pvv] cu relaţia:

$$\begin{aligned}[pvv] = v^T pv = l^T pAQ_{xx}A^T pl - 2l^T pAQ_{xx}A^T pl - l^T pl = \\ = l^T (p - pAQ_{xx}A^T p)l\end{aligned} \qquad (4.90)$$

unde:

Q_{xx}- matricea coeficienţilor de pondere care se calculează cu relaţia:

$$\begin{aligned}Q_{xx} &= (A^T pA)^{-1} A^T pp^{-1}[(A^T pA)^{-1} A^T p]^T = \\ &= (A^T pA)^{-1} A^T pp^{-1} pA(A^T pA)^{-1} = \\ &= (A^T pA)^{-1}\end{aligned} \qquad (4.91)$$

Eroarea medie pătratică a unei funcţii de mărimi măsurate indirect şi de precizii diferite se obţine cu relaţia:

$$m_F = m_0\sqrt{Q_{FF}} \qquad (4.92)$$

unde :

Q_{FF} se calculează cu relaţia:

$$Q_{FF} = f^T Q_{xx} f \qquad (4.93)$$

4.3.4.Măsurători condiţionate

Măsurătorile directe supuse la condiţii sunt întâlnite şi sub denumirea de măsurători condiţionate.In practica prelucrării observaţiilor geodezice în afara condiţiile geometrice liniare se întâlnesc deseori şi condiţii geometrice neliniare, care trebuie liniarizate înainte de a fi utilizate în prelucrare.

Considerând valorile probabile ale mărimilor măsurate direct (x_1), (x_2),..., (x_n), şi condiţiile geometrice exprimate prin funcţiile neliniare f_1, f_2, ..., f_r, date de expresiile:

$$\begin{aligned}&f_1[(x_1),(x_2),...,(x_n)] = 0\\ &f_2[(x_1),(x_2),...,(x_n)] = 0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_r[(x_1),(x_2),...,(x_n)] = 0\end{aligned} \qquad (4.94)$$

şi ţinând seama de faptul că valorile probabile se obţin din mărimile măsurate "x_i" şi corecţiile "v_i" ale acestora:

$$(x_i) = x_i + v_i;\ i = 1,2,...,n \qquad (4.95)$$

sistemul (4.94) devine:

$$\begin{aligned}&f_1(x_1 + v_1, x_2 + v_2, ..., x_n + v_n) = 0\\ &f_2(x_1 + v_1, x_2 + v_2, ..., x_n + v_n) = 0\end{aligned} \qquad (4.96)$$

....

$$f_r(x_1+v_1, x_2+v_2, ..., x_n+v_n)=0$$

Având în vedere faptul că, valorile corecţiilor "v_i" sunt mici, funcţiile (4.96) se pot dezvolta în serie Taylor. Reţinând din dezvoltare numai termenii de ordinal I (până la puterea întâi) se obţine:

$$\begin{aligned} & f_1(x_1,x_2,...,x_n)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)v_1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)v_2+...+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)v_n=0 \\ & f_2(x_1,x_2,...,x_n)+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)v_1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)v_2+...+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)v_n=0 \\ & .... \\ & f_r(x_1,x_2,...,x_n)+\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_1}\right)v_1+\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_2}\right)v_2+...+\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_n}\right)v_n=0 \end{aligned} \quad (4.97)$$

Intrucât funcţiile din (4.97) sunt calculate cu mărimile măsurate şi nu cu cele probabile, vor conduce la valori diferite de zero, valori ce reprezintă neînchiderile în condiţiile geometrice.

Dacă se notează cu "a_i" derivatele parţiale din prima egalitate a sistemului (4.97) , cu "b_i" derivatele parţiale din a doua egalitate, cu "r_i" din ultima egalitate şi cu $w_i = f_i(x_1,x_2,...,x_n)$ se obţine:

$$\begin{aligned} & a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n+w_1=0 \\ & b_1v_1+b_2v_2+...+b_nv_n+w_2=0 \\ & .... \\ & r_1v_1+r_2v_2+...+r_nv_n+w_r=0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

Sistemul de ecuaţii (4.98) se numeşte sistemul ecuaţiilor de corecţii în care n>r, iar ecuaţiile trebuie să fie independente, adică o ecuaţie oarecare să nu fie o consecinţă a altora.

De menţionat că: dacă sistemul admite o soluţie unică el se numeşie ***compatibil determinat,*** iar dacă admite cel puţin două soluţii se numeşte ***compatibil nederminat.***Dacă sistemul nu are soluţii, el este ***incompatibil.***

Analizând sistemul ecuaţiilor de erori, se constată că numărul necunoscutelor este mai mare decât numărul ecuaţiilor, ceea ce face ca sistemul să fie incompatibil.

Sistemul de ecuaţii poate fi rezolvat dacă se ataşează condiţia:

$$[vv] = minim \quad (4.99)$$

Considerând în locul funcţiei (4.99) o funcţie compusă de forma:

$$\begin{aligned} F(v_1,v_2,...,v_n)=v_1^2+v_2^2+...+v_n^2 & -2k_1([av]+w_1)- \\ & -2k_2([bv]+w_2)- \\ & .... \\ & -2k_r([rv]+w_r)- \end{aligned} \quad (4.100)$$

în care :

$k_1, k_2, \ldots, k_r$ - corelate s-au coeficienții nedeterminați a lui Lagrange.

Condiția de minim a funcției (4.100) este îndeplinită pentru valorile corecțiilor care reprezintă soluția sistemului de ecuații:

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} = 0; \frac{\partial F}{\partial v_2} = 0; \ldots, \frac{\partial F}{\partial v_n} = 0; \qquad (4.101)$$

Efectuând derivatele funcției (4.100) se obține:

$$\begin{aligned} &2v_1 - 2k_1a_1 - 2k_2b_1 - \ldots - 2k_rr_1 = 0 \\ &2v_2 - 2k_1a_2 - 2k_2b_2 - \ldots - 2k_rr_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &2v_n - 2k_1a_n - 2k_2b_n - \ldots - 2k_rr_n = 0 \end{aligned} \qquad (4.102)$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} &v_1 = a_1k_1 + b_1k_2 + \ldots + r_1k_r \\ &v_2 = a_2k_1 + b_2k_2 + \ldots + r_2k_r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &v_n = a_nk_1 + b_nk_2 + \ldots + r_nk_r \end{aligned} \qquad (4.103)$$

Se înlocuiește (4.103) în (4.98) și se obține sistemul normal de ecuații:

$$\begin{aligned} &[aa]k_1 + [ab]k_2 + \ldots + [ar]k_r + w_1 = 0 \\ &[ab]k_1 + [bb]k_2 + \ldots + [br]k_r + w_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[ar]k_1 + [br]k_2 + \ldots + [rr]k_r + w_r = 0 \end{aligned} \qquad (4.104)$$

Pentru a rezolva sistemului normal de ecuații se calculează, mai întâi, coeficienții corelatelor, utilizând coeficienții ecuațiilor de erori.

Calculul coeficienților ecuațiilor normale se face în tabelul 4.9 cu aplicarea unor relații de control:

$$\begin{aligned} &a_i + a_i + a_i + \ldots + a_i = s_i \\ &[a] + [b] + [c] + \ldots + [r] = [s] \\ \\ &[aa] + [ab] + [ac] + \ldots + [ar] = [as] \\ &[aa] + [ab] + [ac] + \ldots + [ar] = [as] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[ra] + [rb] + [rc] + \ldots + [rr] = [rs] \end{aligned} \qquad (4.105)$$

Prin aplicarea relațiilor de control (4.105) se elimină posibilitatea de a greși.

Rezolvarea sistemului ecuațiilor normale ale corelatelor se realizează în mod similar cu măsurătorile indirecte, dar cu unele particularități.

. Astfel în coloana termenilor liberi (tabelul 4.10) se trec neînchiderile "w". Pe aceeași coloană, în linia 15, se va calcula [vv], prin însumarea liniilor 12,13,14, care la rândul lor se obțin din produsul termenilor situați pe liniile roșii cu cei de deasupra și luați cu semn schimbat:

$$[vv]=\frac{w_1^2}{[aa]}+\frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]}+\frac{[w_3.2]^2}{[cc.2]} \qquad (4.106)$$

Tabelul 4.9

Nr.crt.	a	b	c	d	...	r	s
1	a_1	b_1	c_1	d_1	...	r_1	s_1
2	a_2	b_2	c_2	d_2	...	r_2	s_2
3	a_3	b_3	c_3	d_3	...	r_3	s_3
.	.	.	.	.	...	.	.
n	a_n	b_n	c_n	d_n	...	r_n	s_n
[ ]	[a]	[b]	[c]	[d]	...	[r]	[s]
	[aa]	[ab]	[ac]	[ad]	...	[ar]	[as]
		[bb]	[bc]	[bd]	...	[br]	[bs]
			[cc]	[cd]	...	[cr]	[cs]
				[dd]	...	[dr]	[ds]
						[rr]	[rs]
							[ss]

Tabelul 4.10

	a]	b]	c]	w]	S]	**Control**
[a	[aa]	[ab]	[ac]	w_1	S_1	
	-1	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[w_1]}{[aa]}$	$-\frac{S_1}{[aa]}$	CF
k_1		[bb]	[bc]	w_2	S_2	

		$\frac{[ab][ac]}{[aa]}$	$\frac{[ab][ac]}{[aa]}$	$\frac{[ab]w_1}{[aa]}$	$\frac{[ab]S_1}{[aa]}$	
		[bb.1]	[bc.1]	$[w_2.1]$	$[S_1.1]$	CO
		-1	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[w_2.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[S_2.1]}{[bb.1]}$	CF
	k_2=		[cc]	w_3	S_3	
			$\frac{[ac][ac]}{[aa]}$	$\frac{[ac]w_1}{[aa]}$	$\frac{[ac]S_1}{[aa]}$	
			$-\frac{[bc.1][bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bc.1][w_2.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bc.1][S_2.1]}{[bb.1]}$	
			[cc.2]	$[w_3.2]$	$[S_3.2]$	CO
			-1	$-\frac{[w_3.2]}{[cc.2]}$	$-\frac{[S_3.2]}{[cc.2]}$	CF
				$\frac{w_1^2}{[aa]}$	$\frac{S_1^2}{[aa]}$	12
				$\frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]}$	$\frac{[S_2.1]^2}{[bb.1]}$	13
				$\frac{[w_3.2]^2}{[cc.2]}$	$\frac{[S_3.2]^2}{[cc.2]}$	14
			[vv]=	[w.3]=	[S.3]	15

Observații: CO- control obligatoriu;
CF- control facultativ (linie roșie);
[vv] – suma corecțiilor se utilizează ca un control de calcul a corelatelor "k_i".

Plecând de la relația (4.103) în care numărul condițiilor geometrice este egal cu trei, se poate scrie:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3; \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (4.107)$$

Inmulțind egalitățile (4.107) cu "v_i", adunînd și ținînd seama de expresiile sistemului ecuațiilor de erori:

$$[av]+w_1=0$$
$$[bv]+w_2=0 \qquad (4.108)$$
$$[cv]+w3=0$$

se obține:

$$[vv]=-w_1k_1-w_2k_2-w_3k_3=-[kw] \qquad (4.109)$$

4.3.4.1. Rezolvarea matriceală a măsurătorilor condiționate de aceeași precizie

Considerând sistemul ecuațiilor de erori (4.98) prin introducerea notațiilor:

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & r_1 \\ a_1 & b_1 & \dots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & r_n \end{pmatrix}; B^T=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 & b_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}; w=-\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_r \end{pmatrix}; v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_r \end{pmatrix} \qquad (4.110)$$

sistemul matriceal de ecuații se scrie:

$$B^Tv=w \qquad (4.111)$$

Atașând sistemului ecuațiilor de erori condiția de minim scrisă matriceal avem:

$$F=v^Tv-2k^T(B^Tv-w)=v^Tv-2v^TBk+2k^Tw=minim \qquad (4.112)$$

în care :

$k^T=(k_1, k_2, \dots k_r)$ -matricea transpusă a corelatelor

Valorile corecțiilor, pentru care este îndeplinită condiția (4.112), verifică sistemul:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial v_i}=; \quad i=1,2,\dots,n \qquad (4.113)$$

Derivând se obține:

$$v=Bk \qquad (4.114)$$

Inlocuind (4.114) în (4.111) se obține ***sistemul ecuațiilor normale*** al corelatelor:

$$B^TBk=w \qquad (4.115)$$

de unde:

$$k=(B^TB)^{-1}w \qquad (4.116)$$

Introducând (4.116) în (4.114) se obține valoarea cea mai probabilă a corecțiilor. "v_i".

$$v=B(B^TB)^{-1}w \qquad (4.117)$$

Eroarea medie pătratică a unei singure măsurători în cazul măsurătorilor condiționate de aceeași precizie se calculează cu relația:

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} \qquad (4.118)$$

Expresia [vv] poate fi calculată matriceal cu relaţia:

$$[vv] = v^T v \qquad (4.119)$$

unde :

$$v^T = k^T B^T \qquad (4.120)$$

iar:

$$v^T v = k^T B^T Bk \qquad (4.121)$$

Tinând seama de (4.116), relaţia (4.121) devine:

$$v^T v = k^T w \qquad (4.122)$$

4.3.4.2. Expresia matriceală a coeficienţilor de pondere

La definirea măsurătorilor condiţionate s-a arătat că valoarea cea mai probabilă a mărimilor măsurate direct este dată de relaţia (4.95).Inlocuind în expresia menţionată pe "x_i" cu "l_i" se obţine:

$$(x_i) = l_i + v_i \qquad (4.123)$$

Exprimând matriceal relaţia (4.123) devine:

$$(x) = l + v \qquad (4.124)$$

Tinând seama de expresia (4.117),în care $w=-B^T l$, se poate scrie:

$$v = B(B^T B)^{-1} B^T l \qquad (4.125)$$

Introducând expresia (4.125) în (4.124) se obţine:

$$(x) = [E - B(B^T B)^{-1} B^T]l \qquad (4.126)$$

Relaţia (4.126) arată că valorile probabile ale mărimilor măsurate direct şi supuse la condiţii sunt funcţii de mărimile măsurate direct .In consecinţă se poate aplica formula (4.53) în care ponderile sunt egale cu unitatea şi avem:

$$Q_{ll} = [E - B(B^T B)^{-1} B^T][E - B(B^T B)^{-1} B^T] =$$
$$= E - B(B^T B)^{-1} B^T - B(B^T B)^{-1} B^T + B(B^T B)^{-1} B^T B(B^T B)^{-1} B^T =$$
$$\vdots \qquad = E - B(B^T B)^{-1} B^T \qquad (4.127)$$

4.3.4.3.Coeficienul de pondere al unei funcţii de mărimi obţinute prin măsurători condiţionate

Considerând funcţia de mărimi obţinute prin măsurători condiţionate:

$$F = f_0 + f_1(l_1 + v_1) + f_2(l_2 + v_2) + \ldots + f_n(l_n + v_n) \qquad (4.128)$$

se poate prezenta sub formă matriceală astfel:

$$F = f_0 + f^T(l+v) \qquad (4.129)$$

în care:

$f^T=(f_1,f_2,\dots,f_n)$ -matricea transpusă a coeficienților din funcție.

Luând în considerare (4.125) se poate scrie funcția dată ca fiind dependentă de mărimile măsurate, astfel:

$$F = [f^T + f^T B(B^T B)^{-1} B^T]l \qquad (4.130)$$

Utilizând din nou formula (4.53), pentru a obține expresia matriceală a coeficientului de pondere al funcției (4.129) se poate scrie:

$$\begin{aligned} Q_{FF} &= [f^T + f^T B(B^T B)^{-1} B^T][f - B(B^T B)^{-1} B^T f] = \\ &= f^T f - f^T B(B^T B)^{-1} B^T f - f^T B(B^T B)^{-1} B^T f + \\ &+ f^T B(B^T B)^{-1} B^T B(B^T B)^{-1} B^T = f^T f - 2f^T B(B^T B)^{-1} B^T f + \\ &+ f^T B(B^T B)^{-1} B^T f = f^T f - f^T B(B^T B)^{-1} B^T f \end{aligned} \qquad (4.131)$$

sau:

$$Q_{FF} = f^T[E - B(B^T B)^{-1} B^T]f \qquad (4.132)$$

Tinând seama de expresia (4.127), relația (4.131) devine:

$$Q_{FF} = f^T Q_{ll} f \qquad (4.133)$$

4.3.5.Măsurători condiționate de precizii diferite

Considerând sistemul ecuațiilor de erori de forma:

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n + w_1 &= 0 \\ b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n + w_2 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ r_1v_1 + r_2v_2 + \dots + r_nv_n + w_r &= 0 \end{aligned} \qquad (4.134)$$

Se admite că mărimile măsurate și incluse în condiții au erori diferite, deci ponderi diferite. In aceste condiții pentru rezolvarea sistemului de erori atașăm condiția:

$$[pvv]=minim \qquad (4.135)$$

sau:

$$\begin{aligned} F = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \dots + p_nv_n^2 - 2k_1([av]+w_1) - \\ -2k_2([bv]+w_2) - \\ \dots\dots\dots \\ -2k_r([rv]+w_r) - \end{aligned} \qquad (4.136)$$

Condiția de minim a funcției (4.136) este îndeplinită pentru valorile corecțiilor care reprezintă soluția sistemului de ecuații:

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} = 0; \frac{\partial F}{\partial v_2} = 0; \dots, \frac{\partial F}{\partial v_n} = 0; \qquad (4.137)$$

Efectuând derivatele funcției (4. 136) se obține:

$$
\begin{aligned}
&2p_1v_1 - 2a_1k_1 - 2b_1k_2 - ... - 2r_1k_r = 0\\
&2p_2v_2 - 2a_2k_1 - 2b_2k_2 - ... - 2r_2k_r = 0 \qquad (4.138)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&2p_nv_n - 2a_nk_1 - 2b_nk_2 - ... - 2r_nk_r = 0
\end{aligned}
$$

de unde rezultă:

$$
\begin{aligned}
&v_1 = \frac{1}{p_1}(a_1k_1 + b_1k_2 + ... + r_1k_r)\\
&v_2 = \frac{1}{p_2}(a_2k_1 + b_2k_2 + ... + r_2k_r) \qquad (4.139)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&v_n = \frac{1}{p_n}(a_nk_1 + b_nk_2 + ... + r_nk_r)
\end{aligned}
$$

Introducând relația (4.139) în sistemul (4.134), se obține sistemul normal de ecuații:

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + ... + \left[\frac{ar}{p}\right]k_r + w_1 = 0\\
&\left[\frac{ab}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]k_2 + ... + \left[\frac{br}{p}\right]k_r + w_2 = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\left[\frac{ar}{p}\right]k_1 + \left[\frac{br}{p}\right]k_2 + ... + \left[\frac{rr}{p}\right]k_r + w_r = 0 \qquad (4.140)
\end{aligned}
$$

In mod similar cu măsurătorile condiționate de aceeași precizie etapele de rezolvare sunt următoarele:

- se calculează coeficienții ecuațiilor normale;
- se rezolvă sistemul ecuațiilor normale, rezultând corelatele;
- se calculează corecțiile;
- se determină valorile cele mai probabile ale mărimilor măsurate.

Pentru calculul coeficienților ecuațiilor normale se utilizează schema redusă, similară cu tabelul 4.9, la care se mai adaugă o coloană pentru se introduce inversele ponderilor.

Tabelul 4.11.

Nr. crt.	1/p	a	b	c	d	...	r	S
1	$\frac{1}{p_1}$	a_1	b_1	c_1	d_1	...	r_1	S_1
2	$\frac{1}{p_2}$	a_2	b_2	c_2	d_2	...	r_2	S_2
3	$\frac{1}{p_3}$	a_3	b_3	c_3	d_3	...	r_3	S_3
.		.	.	.	.	...	.	
n	$\frac{1}{p_n}$	a_n	b_n	c_n	d_n	...	r_n	S_n
[ ]		[a]	[b]	[c]	[d]	...	[r]	[S]
		$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	$\left[\frac{ad}{p}\right]$	...	$\left[\frac{ar}{p}\right]$	$\left[\frac{aS}{p}\right]$
			$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	$\left[\frac{bd}{p}\right]$	...	$\left[\frac{br}{p}\right]$	$\left[\frac{bS}{p}\right]$

$\left[\frac{cc}{p}\right]$	$\left[\frac{cd}{p}\right]$	...	$\left[\frac{cr}{p}\right]$	$\left[\frac{cS}{p}\right]$
	$\left[\frac{dd}{p}\right]$	...	$\left[\frac{dr}{p}\right]$	$\left[\frac{dS}{p}\right]$
			$\left[\frac{rr}{p}\right]$	$\left[\frac{rS}{p}\right]$
				$\left[\frac{SS}{p}\right]$

Tabelul 4.12

a]	b]	c]	w	S
$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	w_1	S_1
-1	$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$	$-\frac{[w_1]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$	$-\frac{[S_1]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$
	$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	w_2	S_2
	$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\left[\frac{ab}{p}\right]$	$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\left[\frac{ac}{p}\right]$	$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}w_1$	$-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}S_1$

	$\left[\frac{bb.1}{p}\right]$	$\left[\frac{bc.1}{p}\right]$	$\left[\frac{w_2.1}{p}\right]$	$\left[\frac{S_2.1}{p}\right]$
	-1	$-\frac{\left[\frac{bc.1}{p}\right]}{\left[\frac{bb.1}{p}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{w_2.1}{p}\right]}{\left[\frac{bb.1}{p}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{S_2.1}{p}\right]}{\left[\frac{bb.1}{p}\right]}$
		$\left[\frac{cc}{p}\right]$	w_3	S_3
		$-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\left[\frac{ac}{p}\right]$	$-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}w_1$	$-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}S_1$
		$-\frac{\left[\frac{bc.1}{p}\right]}{\left[\frac{bb.1}{p}\right]}\left[\frac{bc.1}{p}\right]$	$-\frac{\left[\frac{bc.1}{p}\right]}{\left[\frac{bb.1}{p}\right]}-\left[\frac{w_2.1}{p}\right]$	$-\frac{\left[\frac{bc.1}{p}\right]}{\left[\frac{bb.1}{p}\right]}\left[\frac{S_2.1}{p}\right]$
		$\left[\frac{cc2}{p}\right]$	$\left[\frac{w_3 2}{p}\right]$	$\left[\frac{S_3 2}{p}\right]$
		-1	$-\frac{\left[\frac{w_3 2}{p}\right]}{\left[\frac{cc2}{p}\right]}$	$-\frac{\left[\frac{S_3 2}{p}\right]}{\left[\frac{cc2}{p}\right]}$

De menţionat că rezolvarea şi controlul schemei Gauss – Doolittle se face în mod similar cu sistemul normal de ecuaţii de

la măsurătorile condiționate de aceeași precizie, cu precizarea că la numitorii elementelor apar ponderi.

Eroarea medie pătratică a unității de pondere se calculează cu relația:

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{r}} \qquad (4.141)$$

unde:

r—numărul de condiții geometrice

Pentru eroarea medie pătratică a unei mărimi obținute prin măsurători condiționate de precizii diferite sau a unei funcții de mărimi obținute prin prelucrarea acelorași mărimi se utilizează relația:

$$m_F = \pm m_0\sqrt{Q_{FF}} \qquad (4.142)$$

în care:

$$Q_{FF} = \left[\frac{AA.3}{p}\right] = \left[\frac{AA}{p}\right] - \frac{\left[\frac{aA}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{bA.1}{p}\right]^2}{\left[\frac{bb.1}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{cA.2}{p}\right]^2}{\left[\frac{cc.2}{p}\right]} \qquad (4.143)$$

4.3.5.1.Rezolvarea matriceală a măsurătorilor condiționate de precizii diferite

Cunoscând expresia matriceală a sistemului ecuațiilor de corecții, de la măsurătorile condiționate de aceeași precizie ($B^T v = w$), în care corecțiile "v_i" au erori (ponderi) diferite, va exista o matrice a ponderilor de forma:

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{pmatrix}; \qquad (4.144)$$

Se atașează sistemului ecuațiilor de erori, condiția:

$$F = v^T pv - 2k^T (B^T v - w) = minim \qquad (4.145)$$

Funcția (4.145) se poate scrie:

$$F = v^T pv - 2v^T Bk + k^T w = minim \qquad (4.146)$$

Condiția de minim a funcției (4.146) este îndeplinită pentru soluția sistemului rezultat din derivatele parțiale ale funcției în raport cu "v_i" :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial v_i} = 0 \qquad (4.147)$$

In urma derivării se obține:

$$pv = Bk \qquad (4.148)$$

de unde:

$$v = p^{-1}Bk \qquad (4.149)$$

Înlocuind (4.149) în sistemul ecuaţiilor de erori se obţine:

$$B^T p^{-1} Bk = w \qquad (4.150)$$

în care:

$$p^{-1} = Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}; \qquad (4.151)$$

Ţinând seama de (4.151), relaţia (4.150) devine:

$$B^T QBk = w \qquad (4.153)$$

de unde:

$$k = (B^T QB)^{-1} w \qquad (4.154)$$

Prin introducerea corelatelor (4.154) în relaţia (4.149) se obţin ***valorile cele mai probabile ale corecţiilor***:

$$v = p^{-1} Bk = QB(B^T QB)^{-1} w \qquad (4.155)$$

însă:

$$w = -B^T l \qquad (4.156)$$

atunci:

$$v = -QB(B^T QB)^{-1} B^T l \qquad (4.157)$$

Cu ajutorul corecţiilor "v" se calculează ***valorile cele mai probabile ale mărimilor măsurate:***

$$(x) = l + v \qquad (4.158)$$

în care "v " se înlocuieşte cu expresia (4.157):

$$(x) = [E - QB(B^T QB)^{-1} B^T]l \qquad (4.159)$$

Pentru a calcula coeficienţii de pondere ai corecţiilor se va pleca de la relaţia (4.159), pentru care se aplică o relaţie asemănătoare cu (4.55) , în care apare şi matricea ponderilor p^{-1}=Q:

$$\begin{aligned} Q_{ll} &= [E - QB(B^T QB)^{-1} B^T]\,Q\,[E - B(B^T QB)^{-1} B^T Q] = \\ &= Q - B(B^T QB)^{-1} B^T Q \end{aligned} \qquad (4.160)$$

Pentru calculul coeficienţilor de pondere ai unei funcţii de mărimi condiţionate, de precizii diferite, se consideră funcţia:

$$F = f_0 + f^T (l + v) \qquad (4.161)$$

sau:

$$F = [f^T - f^T QB(B^T QB)^{-1}]l \qquad (4.162)$$

Pentru a calcula coeficientul de pondere al funcţiei se pleacă de la ecuaţia (4.162) şi conform procedeului cunoscut se scrie:

$$Q_{FF} = [f^T - f^T QB(B^T QB)^{-1} B^T] Q [f -$$
$$-B(B^T QB)^{-1} B^T Qf] = f^T Qf - f^T QB(B^T QB)^{-1} B^T Qf \qquad (4.162)$$
$$= f^T Q_{ll} f$$

4.3.6.Măsurători indirecte supuse la condiţii

In practica geodezică se întâlnesc situaţii când anumite mărimi (x_1, x_2,... x_h) sunt legate de "n" observaţii printr-un sistem de forma:

$$a_i x_1 + b_i x_2 + ... + h_i x_h + l_i = v_i \qquad (4.163)$$
$$i = 1, 2, ..., n$$

In acelaşi timp mărimile trebuie să îndeplinească condiţiile scrise sub forma:

$$[A_i x_i]_1^h + w_1 = 0$$
$$[B_i x_i]_1^h + w_2 = 0 \qquad (4.164)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[R_i x_i]_1^h + w_r = 0$$

Trebuie precizat că între numărul observaţiilor "n", numărul necunoscutelor "h" şi numărul condiţiilor "r" există inegalităţile:

$$n > h; \quad r < h \qquad (4.165)$$

Pentru a rezolva sistemul corespunzător măsurătorilor indirecte supus la condiţii, din (4.164) se exprimă primele "r" necunoscute în funcţie de celelalte h-r necunoscute şi acestea se substituie în sistemul (4.163).

Se obţine astfel, un sistem de "n" ecuaţii cu h-r necunoscute şi care se rezolvă utilizând teoria măsurătorilor indirecte.

Eroarea medie pătratică a unei singure măsurători se calculeză cu relaţia:

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-h+r}} \qquad (4.166)$$

Pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii format din (4.163) şi (4.164), prin metoda corelatelor , se scrie condiţia de minim:

$$F = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 - 2k_1(A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_n + w_1) -$$
$$- 2k_2(B_1x_1 + B_2x_2 + ... + B_n + w_2) - \qquad (4.167)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- 2k_r(R_1x_1 + R_2x_2 + ... + R_n + w_n) = minim$$

Minimul funcţiei (4.167) se află pentru valorile care anulează derivatele parţiale ale acesteia în raport cu x_1, x_2,... x_n, deci se poate scrie:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + 2v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_i} + ... + 2v_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} -$$
$$-2A_i k_1 - -2B_i k_2 - ... - 2R_i k_r = 0 \qquad (4.168)$$
$$i = 1, 2, ..., h$$

Tinând seama de (4.163), sistemul (4.168) devine:

$$[aa]x_1 + [ab]x_2 + ... + [ah]x_h - A_1 k_1 - B_1 k_2 - ... - R_1 k_r + [al] = 0$$
$$[ab]x_1 + [bb]x_2 + ... + [bh]x_h - A_2 k_1 - B_2 k_2 - ... - R_2 k_r + [bl] = 0$$

....

$$[ah]x_1 + [bh]x_2 + ... + [hh]x_h - A_h k_1 - B_h k_2 - ... - R_h k_r + [hl] = 0 \qquad (4.169)$$

La sistemul de ecuații (4.169) se adaugă sistemul (4.164) și se obține un sistem de ecuații normale format din h+r ecuații cu h+r necunoscute. Rezolvând sistemul prin schema Gauss rezultă necunoscutele $x_1, x_2, ..., x_h$.

4.3.6.1.Rezolvarea matriceală a măsurătorilor indirecte supuse la condiții

Prezentat sub formă matriceală sistemul (4.163) se poate scrie:

$$Ax + l = v \qquad (4.170)$$

în care:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & ... & h_1 \\ a_2 & b_2 & ... & h_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n & b_n & ... & h_n \end{pmatrix}; l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ ... \\ l_n \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_h \end{pmatrix} \qquad (4.171)$$

iar matricea sistemului (4.164) se prezintă sub forma:

$$Bx + w = 0 \qquad (4.172)$$

în care:

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_h \\ B_1 & B_2 & ... & B_h \\ ... & ... & ... & ... \\ R_1 & R_2 & ... & R_n \end{pmatrix}; w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ ... \\ w_h \end{pmatrix}; \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_h \end{pmatrix} \qquad (4.173)$$

Pentru măsurătorile indirecte supuse la condiții, există următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned} Ax + l &= v \\ Bx + w &= 0 \end{aligned} \qquad (4.174)$$

Pentru rezolvarea sistemului (4.174) se atașează condiția de minim, care se prezintă sub forma:

$$F = v^T v - 2k^T (Bx + w) = minim \qquad (4.175)$$

sau:

$$F=(x^T A^T + l^T)(Ax+l)-2k^T(Bx+w)= \\ = x^T A^T Ax + 2x^T A^T l - 2x^T B^T k - 2k^T w = minim \qquad (4.175')$$

După derivare se obține:

$$\begin{aligned} &A^T Ax + A^T l - B^T k = 0 \\ &Bx + w = 0 \end{aligned} \qquad (4.176)$$

In cazul măsurătorilor ponderate se poate scrie:

$$\begin{aligned} &A^T pAx + A^T pl - B^T k = 0 \\ &Bx + w = 0 \end{aligned} \qquad (4.177)$$

Din prima ecuație a sistemului (4.177) se determină :

$$x = -(A^T pA)^{-1} A^T pl + (A^T pA)^{-1} B^T k \qquad (4.178)$$

Se notează :

$$(A^T pA)^{-1} = Q_0$$

Atunci (4.178) ia forma:

$$x = -Q_0 A^T pl + Q_0 B^T k \qquad (4.179)$$

Introducând relația (4.179) în a doua ecuație a sistemului (4.177) se obține:

$$-BQ_0 A^T pl + BQ_0 B^T k + w = 0 \qquad (4.180)$$

de unde:

$$k = (BQ_0 B^T)^{-1} BQ_0 A^T pl - w) \qquad (4.181)$$

Introducând (4.181) în relația (4.179) se obține:

$$x = -Q_0 A^T pl + Q_0 B^T (BQ_0 B^T)^{-1} BQ_0 A^T pl - \\ - Q_0 B^T (BQ_0 B^T)^{-1} w \qquad (4.182)$$

sau:

$$x = -Q_0 \left\{ [B^T (BQ_0 B^T)^{-1} BQ_0 - E] A^T l - B^T (BQ_0 B^T)^{-1} w \right\} \qquad (4.183)$$

Matricea coeficienților de pondere, pentru mărimile "x_i" care se determină, se stabilește după ce în prealabil acestea se exprimă în funcție de mărimile măsurate direct.

Pentru aceasta din prima ecuație a sistemului (4.177) se poate scrie:

$$x = -(A^T pA)^{-1} A^T pl + (A^T pA)^{-1} B^T k = \\ = -Q_0 A^T pl + Q_0 B^T k; \quad Q_0 = (A^T pA)^{-1} \qquad (4.184)$$

Se introduce expresia lui "x" în a doua ecuație a sistemului (4.177):

$$-BQ_0 A^T pl + BQ_0 B^T k + w = 0 \qquad (4.185)$$

de unde:

$$k = \left(BQ_0 B^T\right)^{-1} BQ_0 A^T pl - \left(BQ_0 B^T\right)^{-1} w \qquad (4.186)$$

Introducând notația (4.187), relația (4.186) va deveni (4.188).

$$\overline{Q} = \left(BQ_0B^T\right)^{-1} \qquad (4.187)$$

$$k = \overline{Q}BQ_0A^T pl - \overline{Q}w \qquad (4.188)$$

Se introduce expresia lui "k" în relația (4.184) și rezultă:

$$\begin{aligned} x &= -Q_0A^T pl + Q_0B^T(\overline{Q}BQ_0A^T pl - \overline{Q}w) = \\ &= -Q_0A^T pl + Q_0B^T\overline{Q}BQ_0A^T pl - Q_0B^T\overline{Q}w = \\ &= Q_0[(B^T\overline{Q}BQ_0A^T p - A^T p)l - B^T\overline{Q}w] \end{aligned} \qquad (4.189)$$

Luând în considerare numai termenul care conține matricea "*l*" se poate scrie:

$$Q^{**} = Q_0(B^TQBQ_0A^T p - A^T p)Q(pAQ_0B^TQB - pA)Q_0 \qquad (4.190)$$

După rezolvare și reducere se obține:

$$Q^{**} = Q_0 - Q_0B^TQBQ_0 \qquad (4.191)$$

Conform [6], eroarea medie pătratică a unității de pondere se calculează cu relația:

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-h+r}} \qquad (4.192)$$

în care :

$$\begin{aligned} [pvv] &= x^T A^T pAx + 2x^T A^T pl + l^T pl = \\ &= x^T A^T pl - x^T B^T k + l^T pl \end{aligned} \qquad (4.193)$$

5. REZOLVAREA REȚELELOR DE TRIANGULAȚIE PRIN METODA MĂSURĂTORILOR INDIRECTE

5.1.Considerații generale

Pentru determinarea pozițiilor noilor puncte, în rețelele de triangulație se măsoară, întotdeauna, un număr mult mai mare de direcții decât strictul necesar.

Direcțiile măsurate, efectuate în plus față de strictul necesar, permit descoperirea erorilor la măsurători , aprecierea asupra preciziei observațiilor de teren, determinarea cu mai mare precizie a coordonatelor punctelor rețelei executate.

Utilizarea în calcule a direcțiilor măsurate, datorită erorilor inerente oricărei măsurători conduce la obținerea pentru un același punct a mai multor valori.

De aceea, înaintea calculelor definitive ale triangulației se fac calcule de compensare, care au ca scop să obțină, pentru fiecare punct ce se determină, numai o singură și cea mai probabilă valoare a coordonatelor sale.

Rețelele de triangulație de ordin superior se compensează prin metode riguroase și anume: prin metoda măsurătorilor indirecte (variația coordonatelor punctelor) și metoda măsurătorilor condiționate (variația unghiurilor și a direcțiilor).

Valorile corecțiilor determinate prin metoda măsurătorilor indirecte se aplică coordonatelor punctelor, iar

cele obținute prin metoda măsurătorilor condiționate se referă la unghiuri și laturi și răspund condițiilor de geometrizare a rețelei.

Indiferent de metoda de compensare aplicată, înainte de a se introduce în calculele de compensare, direcțiile măsurate pe teren se verifică , se reduc la centrele punctelor, se reduc de asemeni în planul de proiecție Gauss sau stereografic.

Pentru obținerea direcțiilor reduse în plan, se efectuează următoarele operații:

- se verifică datele de teren;
- se înscriu în tabele direcțiile măsurate;
- se întocmește schema rețelei care urmează a se compensa;
- se face o rezolvare provizorie a triunghiurilor ;
- se calculează provizoriu coordonatele punctelor;
- se calculează corecțiile de centrare și reducere la coardă în plan Gauss sau stereografic.

Cu privire la metoda de compensare este de precizat că metoda compensării prin măsurători indirecte are o largă aplicare în cazul rețelelor vaste de ordinul I și II și se explică prin faptul că necesită un volum mai redus de muncă și permite o repartiție a lucrărilor pe mai mulți calculatori.

La prelucrarea rețelelor inferioare ordinelor III,IV se aplică atât metoda variației coordonatelor, cât și compensarea după metoda măsurătorilor condiționate.

Alegerea uneia sau a celeilalte metode de compensare, depinde atât de complexitatea rețelei cât și de numărul și modul de distribuire a punctelor rețelei.

La rețele complicate, sau în cazul unui număr mare de puncte inițiale, se aplică metoda compensării coordonatelor. La rețelele mai simple se execută compensarea după metoda măsurătorilor condiționate.

Rețelele de ordinul I se rezolvă pe suprafața de referință elipsoidală sau sferică, pe baza noțiunilor tratate la Geodezia elipsoidală, iar rețelele de triangulație de ordinele II, III, IV și V, se rezolvă pe suprafața plană.

Prin rezolvarea rețelelor de triangulație se urmărește determinarea coordonatelor plane a unor puncte geodezice, utilizând ca mărimi cunoscute coordonatele plane ale punctelor geodezice (mărimi date) și direcții de legătură între punctele geodezice (mărimi măsurate).

5.2 Rezolvarea rețelelor de triangulație prin metoda măsurătorilor indirecte

Considerând rețeaua geodezică (fig.5.1.) formată din punctele cunoscute P_1, P_2 ....P_5 (puncte vechi sau fixe) și din punctele necunoscute P_0 și R_0 (puncte noi sau variabile).

In aceste puncte s-au notat cu 1, 2, ...28, direcțiile de legătură măsurate, centrate și reduse, la suprafața de proiecție .

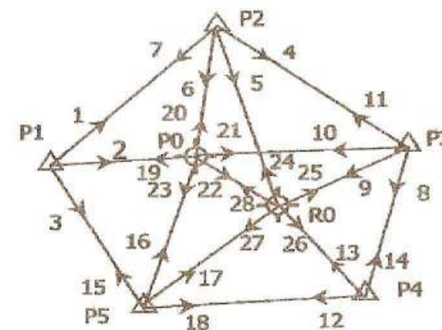


Fig.5.1.Rețea godezică

Rezolvarea acestei rețele constă în determinarea coordonatelor plane ale punctelor noi "P_0" și "R_0".

Se consideră că punctele vechi aparțin unei rețele geodezice de ordin superior, iar punctele noi sunt de ordin inferior.

În situațiile practice de determinare a punctelor geodezice ***prin metoda măsurătorilor indirecte*** apar diferite cazuri și anume:

- cazul în care punctele vechi sunt staționabile și punctele noi sunt nestaționabile, cunoscut sub denumirea de intersecție înainte multiplă;
- cazul în care punctele vechi sunt nestaționabile și punctele noi sunt staționabile, cunoscut sub denumirea de intersecție multiplă înapoi;
- cazul în care punctele geodezice vechi și noi sunt staționabile, cunoscut sub numele de intersecție combinată.

Inainte de a trece la rezolvarea propriu-zisă a rețelelor de triangulație, se va prezenta modul de scriere a ecuaților de corecții corespunzătoare măsurătorilor indirecte.

5.2.1.Scrierea ecuațiilor de corecții

Considerând punctele provizorii i^0, j^0 ale rețelei de triangulație, cu vize reciproce, de coordonate $i^0(x_i^0, y_i^0)$, $j^0(x_j^0, y_j^0)$, determinate prin metode topografice, după compensare vor avea coordonatele:

$$(x_i) = x_i^0 + \Delta x; \quad (x_j) = x_j^0 + \Delta x$$
$$(y_i) = y_i^0 + \Delta y; \quad (y_j) = y_j^0 + \Delta y \tag{5.1}$$

În fig.5.2.se remarcă faptul că, la o variație a coordonatelor Δx, Δy a punctelor i^0 și j^0, se înregistrează o variație a orientării Δθ .

Exprimând valoarea cea mai probabilă a orientării în funcție de orientarea calculată și corecția Δθ vom obține:

$$\left(\theta_{ij}^c\right) = \theta_{ij}^c + \Delta\theta_{ij} \tag{5.2}$$

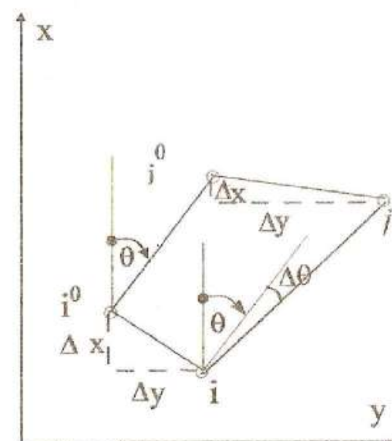


Fig.5.2 Variația orientării în funcție de variația coordonatelor

De asemenea, se exprimă valoarea cea mai probabilă a orientării măsurate în funcție de valoarea cea mai probabilă a orientării direcției zero a limbului (z) și valoarea cea mai probabilă a direcției măsurate (r_{ij}), astfel se poate scrie:

$$(z_i) = z_i + \Delta z_i \qquad (5.3)$$

$$(r_{ij}) = r_{ij} + v_{ij} \qquad (5.4)$$

$$\left(\theta_{ij}^{m}\right) = (z_i) + (r_{ij}) = z_i + \Delta z_i + r_{ij} + v_{ij} \qquad (5.5)$$

unde:

z_i – orientarea direcţiei zero a limbului pentru staţia „i";
Δz_i – corecţia orientării staţiei „i";
v_{ij} – corecţia direcţiei măsurate.

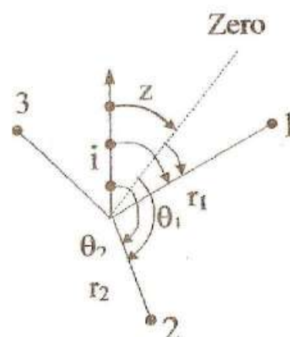


Fig.5.3.Orientarea direcţiei zero a limbului (modulul staţiei)

Orientarea direcţiei zero a limbului (fig.5.3.), pentru o staţie „i", se obţine ca o medie aritmetică a diferenţelor dintre orientările calculate θ^{c}_{ij} (j=1,2,3...n) şi lecturile direcţiilor r_{ij}:

$$z_i = \frac{[\theta_{ij} - r_{ij}]}{n} \quad unde\ j = 1,2,3...n \qquad (5.6)$$

Egalând relaţiile (5.2) şi (5.5) se poate scrie:

$$\theta_{ij}^{c} + \Delta\theta_{ij} = z_i + \Delta z_i + r_{ij} + v_{ij} \qquad (5.7)$$

$$\Delta\theta_{ij} - \Delta z_i - \underbrace{(z_i + r_{ij})}_{\theta_{ij}^{m}} + \theta_{ij}^{c} = v_{ij} \qquad (5.8)$$

$$\Delta\theta_{ij} - \Delta z_i \underbrace{-\theta_{ij}^{m} + \theta_{ij}^{c}}_{l_{ij}} = v_{ij} \qquad (5.9)$$

$$\Delta\theta_{ij} - \Delta z_i + l_{ij} = v_{ij} \qquad (5.10)$$

In relaţia (5.10.), pentru a exprima variaţia orientării $\Delta\theta_{ij}$ în funcţie de variaţia coordonatelor Δx, Δy, ale punctelor „i" şi „j"(considerate ca puncte noi) se va diferenţia expresia tangentei (5.11):

$$tg\left(\theta_{ij}^{0}\right) = \frac{y_j^0 - y_i^0}{x_j^0 - x_i^0} \qquad (5.11)$$

$$\frac{\Delta\theta_{ij}}{\cos^2\theta_{ij}^{0}} = \frac{\Delta x_{ij}^{0}(\Delta y_j - \Delta y_i) - \Delta y_{ij}^{0}(\Delta x_j - \Delta x_i)}{\left(\Delta x_{ij}^{0}\right)^2} \qquad (5.12)$$

de unde:

$$\Delta\theta_{ij} = \cos^2\theta_{ij}^0\left(\frac{\Delta x_{ij}^0}{\left(\Delta x_{ij}^0\right)^2}\Delta y_j - \frac{\Delta x_{ij}^0}{\left(\Delta x_{ij}^0\right)^2}\Delta y_i - \frac{\Delta y_{ij}^0}{\left(\Delta x_{ij}^0\right)^2}\Delta x_j + \frac{\Delta y_{ij}^0}{\left(\Delta x_{ij}^0\right)^2}\Delta x_i\right) =$$

$$= \rho^{cc}\cos^2\theta_{ij}^0\left(\frac{D_{ij}\cos\theta_{ij}^0}{D_{ij}^2\cos^2\theta_{ij}^0}\Delta y_j - \frac{D_{ij}\cos\theta_{ij}^0}{D_{ij}^2\cos^2\theta_{ij}^0}\Delta y_i - \frac{D_{ij}\sin\theta_{ij}^0}{D_{ij}^2\cos^2\theta_{ij}^0}\Delta x_j + \frac{D_{ij}\sin\theta_{ij}^0}{D_{ij}^2\cos^2\theta_{ij}^0}\Delta x_i\right)$$

$$= -\rho^{cc}\frac{\sin\theta_{ij}^0}{D_{ij}}\Delta x_j + \frac{\cos\theta_{ij}^0}{D_{ij}}\Delta y_j + \rho^{cc}\frac{\sin\theta_{ij}^0}{D_{ij}}\Delta x_i - \frac{\cos\theta_{ij}^0}{D_{ij}}\Delta y_i \quad (5.13)$$

Introducând în relația (5.13) notațiile :

$$a_{ij} = -\rho^{cc}\frac{\sin\theta_{ij}^0}{D_{ij}}$$
$$b_{ij} = \rho^{cc}\frac{\cos\theta_{ij}^0}{D_{ij}} \quad (5.14)$$

se obține :

$$\Delta\theta_{ij}^{cc} = a_{ij}\Delta x_j + b_{ij}\Delta y_j - a_{ij}dx_i - b_{ij}\Delta y_i \quad (5.15)$$

unde:

„a_{ij}" și „b_{ij}" se numesc coeficienți de direcție, prin intermediul cărora se exprimă variația orientării pe unitatea de lungime considerată.

Calculul practic al coeficienților de direcție se efectuează în tabelul 5.1. Astfel se trec:

- în coloana 1 denumirile punctelor;
- în coloana 2 și 3 coordonatele punctelor;
- în coloana 4 se calculează tg θ,ctg θ, și θ;
- în coloana 5 se calculează sin θ și cos θ;
- în coloana 6 se calculează distanțele;

- în coloana 7 se calculează coeficienții de direcție cu relațiile (5.14)
- în coloana 8 se face controlul coeficienților de direcție.

Tabelul 5.1.

Pct.	X	Y	tgθ, ctgθ, θ	sinθ cosθ	D=Δx/cosθ D=Δy/sinθ $D=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$	a_{ij} b_{ij}	Control a/b=-tg b/a=-ctg
1	2	3	4	5	6	7	8
i	x_i	y_i	$\Delta y_{ij}/\Delta x_{ij}$				
j	x_j	y_j	$\Delta x_{ij}/\Delta y_{ij}$				
Δij	x_j- x_i	y_j- y_i	arc tg				

Observații:

- Pentru rețele de mici dimensiuni (1-4km) se poate opera cu coeficienți de 100 sau de 1000 de ori mai mici decât cei din (5.14) și ca urmare corecțiile Δx și Δy vor fi exprimate în „cm" sau „mm".
- Controlul calculelor coeficienților de direcție se realizează cu relațiile:

$$\frac{a_{ij}}{b_{ij}} = -tg\ \theta_{ij}^0;\quad \frac{b_{ij}}{a_{ij}} = -ctg\ \theta_{ij}^0 \quad (5.16)$$

- Deoarece $\theta_{ji}^0 = \theta_{ij}^0 + 200^g$ vom avea:

$$a_{ij} = -a_{ji};\quad b_{ij} = -b_{ji}$$
$$\Delta\theta_{ij} = \Delta\theta_{ji} \quad (5.17)$$

Inlocuind relația (5.15) în (5.10) se obține ecuația de

corecții între două puncte noi:

$$a_{ij}dx_j + b_{ij}dy_j - a_{ij}dx_i - b_{ij}dy_i - \Delta z_i + l_{ij} = v_{ij} \qquad (5.18)$$

Relația (5.18) reprezintă forma generală de scriere a unei ecuații de corecții, utilizată la încadrarea simultană a două puncte noi. Din relația menționată mai sus derivă cazurile particulare, după cum urmează:

➢ Considerând că punctul „i" este vechi, iar punctul „j" este nou, astfel încât $dx_i=dy_i=0$ și ca urmare ecuația (5.18) devine:

$$a_{ij}dx_j + b_{ij}dy_j - \Delta z_i + l_{ij} = v_{ij} \qquad (5.19)$$

Ecuația (5.19) se utilizează în cazul intersecțiilor multiple înainte.

➢ Considerând că punctul „j" este vechi și punctul de stație „i" este nou, în acest caz $dx_j=dy_j=0$, și ca urmare expresia (5.18) devine:

➢

$$-a_{ij}dx_i - b_{ij}dy_i - \Delta z_i + l_{ij} = v_{ij} \qquad (5.20)$$

Ecuația (5.20) se utilizează în cazul intersecțiilor multiple înapoi

➢ Considerând că punctele „i" și „j" sunt vechi, caz în care $dx_i=dy_i= dx_j=dy_j=0$, astfel ecuația (5.18) devine:

$$-\Delta z_i + l_{ij} = v_{ij} \qquad (5.21)$$

Ca necunoscută în această ecuație apare variația direcției zero a limbului calculată față de media aritmetică.

5.2.2. Intersecția multiplă înainte

Considerăm punctele vechi P_1, P_2, P_3, A, B, C, D și punctul nou "P_0". Din punctele P_1, P_2, P_3 se fac observații, conform schiței de observații (fig.5.4), către punctele vechi, cât și spre punctul nou.

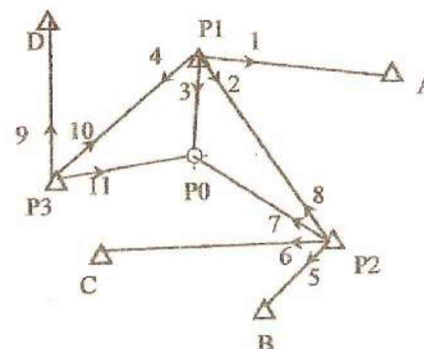


Fig.5.4 Intersecția multiplă înainte

Pentru utilizarea teoriei măsurătorilor indirecte la rezolvarea rețelei geodezice se va porni de la principiul că sistemul ecuațiilor de corecții este format dintr-un număr de ecuații egal cu numărul mărimilor măsurate , respectiv 11 ecuații.

Scrierea unui astfel de sistem este posibilă odată cu stabilirea formei ecuației corespunzătoare unei direcții măsurate.In acest sens se vor aplica relațiile (5.19) și (5.21).

5.2.2.1. Scrierea sistemului ecuațiilor de corecții

Sistemul ecuațiilor de corecții, conform fig.5.4.este format din 11 ecuații, compus din: 4 ecuații corespunzătoare celor 4 direcții măsurate în punctul "P_1", 4 ecuații pentru cele 4 direcții din punctul "P_2" și 3 ecuații pentru direcțiile din punctul "P_3".

Cu aceste precizări putem scrie:

- pentru punctul de stație "P_1":

$$-\Delta z_1 + l_{1A} = v_{1A}$$
$$-\Delta z_1 + l_{12} = v_{12}$$
$$a_{10}\Delta x_0 + b_{10}\Delta y_0 - \Delta z_1 + l_{10} = v_{10}$$
$$-\Delta z_1 + l_{1D} = v_{1D}$$

- pentru punctul de stație "P_2":

$$-\Delta z_2 + l_{2B} = v_{2B}$$
$$-\Delta z_2 + l_{2C} = v_{2C}$$
$$a_{20}\Delta x_0 + b_{20}\Delta y_0 - \Delta z_2 + l_{20} = v_{20}$$
$$-\Delta z_2 + l_{21} = v_{21}$$

- pentru punctul de stație "P_3":

$$-\Delta z_3 + l_{3D} = v_{3D}$$

$$-\Delta z_3 + l_{31} = v_{31}$$
$$a_{30}\Delta x_0 + b_{30}\Delta y_0 - \Delta z_3 + l_{30} = v_{30} \qquad (5.22)$$

Se consideră că ecuațiile au ponderi egale și egale cu 1, în ideea că măsurarea direcțiilor s-a făcut cu aceeași precizie.

5.2.2.2. Rezolvarea sistemului ecuațiilor de corecții

Analizând forma sistemului ecuațiilor de corecții (5.22) se observă că acesta aparține categoriei de măsurători indirecte, adică numărul ecuațiilor este mai mare decât numărul necunoscutelor principale (Δx_0, Δy_0, Δz_1, Δz_2, Δz_3).

Notând coeficienții necunoscutelor cu a_i, b_i, ..., e_i și termenii liberi cu l_i ("i" luând valori de la 1 la 11) obținem, conform teoriei măsurătorilor indirecte § 4.3.2, forma literală a sistemului de ecuații normale:

$$[aa]\Delta x_0 + [ab]\Delta y_0 + [ac]\Delta z_1 + [ad]\Delta z_2 + [ae]\Delta z_3 + [al] = 0$$
$$[bb]\Delta y_0 + [bc]\Delta z_1 + [bd]\Delta z_2 + [be]\Delta z_3 + [bl] = 0$$
$$[cc]\Delta z_1 + [cd]\Delta z_2 + [ce]\Delta z_3 + [cl] = 0$$
$$[dd]\Delta z_2 + [de]\Delta z_3 + [dl] = 0$$
$$[ee]\Delta z_3 + [el] = 0 \quad (5.23)$$

Procedând la rezolvarea sistemului de ecuații normale (5.23.) după stabilirea numerică a coeficienților și termenilor liberi ai acestui sistem, obținem valorile probabile ale corecțiilor (Δx_0, Δy_0) și în același timp valorile probabile ale corecțiilor unghiurilor de orientare a stațiilor (Δz_1, Δz_2, Δz_3).

Având în vedere faptul că, practic nu interesează corecțiile Δz_1, Δz_2, Δz_3 sistemul de ecuații (5.22) poate fi transformat într-un sistem echivalent de ecuații care să conțină numai corecțiile Δx_0, Δy_0.

În acest scop se vor prezenta câteva metode de transformare a unui sistem de ecuații de erori, corespunzător măsurătorilor indirecte, într-un sistem echivalent, care are aceleași soluții cu sistemul inițial.

5.2.2.3. Transformarea sistemelor de ecuații în sisteme echivalente (Regulile lui Schreiber)

Două sisteme de ecuații ale corecțiilor se numesc echivalente dacă le corespund unul și același sistem de ecuații normale și prin urmare conduc la obținerea acelorași valori pentru necunoscutele care le conțin.

Considerând o rețea geodezică formată din "N" puncte noi și "S" stații, numărul total al necunoscutelor va fi de 2N+S, fiind format din corecțiile Δx, Δy al punctelor noi și din corecțiile Δz ale orientărilor punctelor de stație.

Pentru simplificarea demonstrațiilor considerăm un sistem format din "n" ecuații și 3 necunoscute, grupate în jurul unui punct de stație,de forma (5.22).

Regula 1

Considerăm următorul sistem de ecuații al corecțiilor:

$$a_1\Delta x + b_1\Delta y - \Delta z + l_1 = v_1 \quad \text{cu ponderea } p_1$$

$$a_2\Delta x + b_2\Delta y - \Delta z + l_2 = v_2 \quad \text{cu ponderea } p_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n\Delta x + b_n\Delta y - \Delta z + l_n = v_n \quad \text{cu ponderea } p_n \quad (5.24.)$$

Sistemul (5.24) poate fi înlocuit printr-un sistem echivalent care are un număr de n+1 ecuații, însă din care lipsește necunoscuta Δz:

$$a_1\Delta x + b_1\Delta y + l_1 = v_1 \quad \text{cu ponderea } p_1$$

$$a_2\Delta x + b_2\Delta y + l_2 = v_2 \quad \text{cu ponderea } p_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n\Delta x + b_n\Delta y + l_n = v_n \quad \text{cu ponderea } p_n$$

$$[pa]\Delta x + [pb]\Delta y + [pl] = [pv] \qquad p_{n+1} = -\frac{1}{[p]} \quad (5.25)$$

Ultima ecuație a sistemului, de mai sus, este denumită ***ecuație sumă***.

Se demonstrează echivalența sistemelor de ecuații (5.24) și (5.25), arătând că ele au acelaşi sistem de ecuații normale.

Sistemul de ecuații normale, corespunzător sistemului ecuațiilor de corecții (5.24), are forma:

$$\begin{aligned} &[paa]\Delta x + [pab]\Delta y - [pa]\Delta z + [pal] = 0 \\ &[pba]\Delta x + [pbb]\Delta y - [pb]\Delta z + [pbl] = 0 \\ &-[pa]\Delta x - [pb]\Delta y + [p]\Delta z - [pl] = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Din ultima ecuţie a sistemului (5.26) determinăm necunoscuta Δz:

$$\Delta z = \frac{[pa]}{[p]}\Delta x + \frac{[pb]}{[p]}\Delta y + \frac{[pl]}{[p]} \qquad (5.27)$$

şi o introducem în primele două ecuaţii ale sistemului (5.26):

$$\begin{aligned}&\left\{[paa]-\frac{[pa][pa]}{[p]}\right\}\Delta x + \left\{[pab]-\frac{[pa][pb]}{[p]}\right\}\Delta y + \left\{[pal]-\frac{[pa][pl]}{[p]}\right\} = 0\\&\left\{[pba]-\frac{[pb][pa]}{[p]}\right\}\Delta x + \left\{[pbb]-\frac{[pb][pb]}{[p]}\right\}\Delta y + \left\{[pbl]-\frac{[pb][pl]}{[p]}\right\} = 0\end{aligned} \qquad (5.28)$$

Sistemul de ecuaţii normale (5.28) este identic cu sistemul de ecuaţii normale ce poate fi scris pentru sistemul (5.25).

Regula 2

Sistemul de ecuaţii, cu aceiaşi coeficienţi ai necunoscutelor şi cu termenii liberi diferiţi:

$$\begin{aligned}&a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z + l_1 = v_1 \quad \text{cu ponderea } p_1\\&a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z + l_2 = v_2 \quad \text{cu ponderea } p_2\\&\text{------------------------------}\\&a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z + l_n = v_n \quad \text{cu ponderea } p_n\end{aligned} \qquad (5.29)$$

este echivalent cu ecuaţia:

$$a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z + \frac{[pl]}{[p]} = v' \quad \text{cu ponderea [p]} \qquad (5.30)$$

în care termenul liber este media ponderată a termenilor liberi ai sistemului (5.29), iar ponderea este egală cu suma ponderilor ecuaţiilor de erori.

Arătăm acest lucru scriind sistemul ecuaţiilor normale ale sistemului (5.30), respectiv:

$$\begin{aligned}&aa[p]\Delta x + ab[p]\Delta y + ac[p]\Delta z + a[pl] = 0\\&ab[p]\Delta x + bb[p]\Delta y + bc[p]\Delta z + b[pl] = 0\\&ac[p]\Delta x + bc[p]\Delta y + cc[p]\Delta z + c[pl] = 0\end{aligned} \qquad (5.31)$$

Ecuaţiei (5.30) îi corespunde acelaşi sistem de ecuaţii normale.

Regula 3

Ecuaţia de erori:

$$a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z + l = v \qquad \text{cu ponderea p} \quad (5.32)$$

este echivalentă cu ecuaţia:

$$a\sqrt{p}\Delta x + b\sqrt{p}\Delta y + c\sqrt{p}\Delta z + l\sqrt{p} = v' \qquad \text{cu ponderea 1} \quad (5.33)$$

pentru că, au acelaşi sistem de ecuaţii normale.

5.2.2.4 Rezolvarea simplificată a sistemului ecuațiilor de erori

Pentru prezentarea metodei, din sistemul (5.22) se vor lua ecuațiile de erori ce revin direcțiilor măsurate în punctul de stație "P_1":

$$
\begin{aligned}
-\Delta z_1 + l_{1A} &= v_{1A} && p_{1A}=1\\
-\Delta z_1 + l_{12} &= v_{12} && p_{12}=1\\
a_{10}\Delta x_0 + b_{10}\Delta y_0 - \Delta z_1 + l_{10} &= v_{10} && p_{10}=1 \quad (5.34)\\
-\Delta z_1 + l_{1D} &= v_{1D} && p_{1D}=1
\end{aligned}
$$

Conform regulei I sistemul (5.34) devine:

$$a_{10}\Delta x_0 + b_{10}\Delta y_0 + l_{10} = v'_{10} \text{ cu ponderea 1} \qquad (5.35)$$

$$a_{10}\Delta x_0 + b_{10}\Delta y_0 + [l] = v'_{10} \quad p = -\frac{1}{[p]} = -\frac{1}{n_1}; [p] = n_1$$

Termenii liberi din sistemul ecuațiilor de erori se calculează de asemenea, într-un tabel a cărui formă se prezintă în cele ce urmează. Pentru punctul de stație „P_1" din fig.5.4 vom avea:

Tabelul 5.2

Punct S	Punct V	Nr. viză	r_i	θ^c	$z_i=\theta^c-r_i$	$z_m=[z_i]/n$	$\theta^m=z_m+r_i$	$l_i=\theta^c-\theta^m$
	A	1	r_1	θ_1^c	z_1		$\theta_1^m=z_m+r_1$	l_1
P_1	P_2	2	r_2	θ_2^c	z_2		$\theta_2^m=z_m+r_2$	l_2
	P_0	3	r_3	θ_3^c	z_3		$\theta_3^m=z_m+r_3$	l_3
	P_3	4	r_4	θ_4^c	z_4		$\theta_4^m=z_m+r_4$	l_4
[ ]								$[l_i]=0$

Observație : In tabelul 5.2. se remarcă faptul că suma termenilor liberi este egală cu zero ($[l]=0$) deoarece termenii liberi se calculează față de o medie aritmetică.

Așadar se poate scrie:

$$a_{10}\Delta x_0 + b_{10}\Delta y_0 + l_{10} = v'_{10} \text{ cu ponderea 1} \qquad (5.36)$$

$$a_{10}\Delta x_0 + b_{10}\Delta y_0 = v'_{10} \text{ cu ponderea } \quad p = -\frac{1}{n_1} = -\frac{1}{[p]};$$

n_1 – numărul direcțiilor măsurate în "P_1"

Conform regulei 2 sistemul (5.36) poate fi scris:

$$a_{10}\Delta x_0 + b_{10}\Delta y_0 + \frac{n_1}{n_1-1} l_{10} = v''_{10} \ ; p = \frac{n_1-1}{n_1} \qquad (5.37)$$

Conform regulei 3 ecuația (5.37) devine:

$$a_{10}\frac{\sqrt{n_1-1}}{\sqrt{n_1}}\Delta x_0 + b_{10}\frac{\sqrt{n_1-1}}{\sqrt{n_1}}\Delta y_0 + \frac{n_1}{n_1-1}\frac{\sqrt{n_1-1}}{\sqrt{n_1}} l_{10} = v'''_{10} \qquad (5.38)$$

În acelaşi mod ecuațiile de erori pentru direcțiile din "P_2" şi "P_3" sunt echivalente cu ecuațiile:

$$a_{20}\frac{\sqrt{n_2-1}}{\sqrt{n_2}}\Delta x_0+b_{20}\frac{\sqrt{n_2-1}}{\sqrt{n_2}}\Delta y_0+\frac{n_2}{n_2-1}\frac{\sqrt{n_2-1}}{\sqrt{n_2}}l_{20}=v_{20}''' \quad (5.40)$$

$$a_{30}\frac{\sqrt{n_3-1}}{\sqrt{n_3}}\Delta x_0+b_{30}\frac{\sqrt{n_3-1}}{\sqrt{n_3}}\Delta y_0+\frac{n_3}{n_3-1}\frac{\sqrt{n_3-1}}{\sqrt{n_3}}l_{30}=v_{30}''' \quad (5.41)$$

în care "n_2" şi "n_3" reprezintă numărul direcţiilor măsurate în punctele de staţie "P_2" şi "P_3".

Aşadar, sistemul iniţial al ecuaţiilor de erori format din 11 ecuaţii se transformă într-un sistem echivalent format din 3 ecuaţii şi care conţine numai două necunoscute (Δx_0, Δy_0).

De aici şi sistemul ecuaţiilor normale este mai simplu de stabilit şi evident mai simplu de rezolvat.

Necunoscutele Δz_1, Δz_2, Δz_3 pot fi eliminate fără a reduce numărul de ecuaţii de erori.

Pentru aceasta sistemul (5.22) conform metodei 1 poate fi scris:

$$\begin{aligned}
&0\Delta x_0+0\Delta y_0+l_{1A}=v'_{1A};\ p_{1A}=1\\
&0\Delta x_0+0\Delta y_0+l_{12}=v'_{12};\ p_{12}=1\\
&a_{10}\Delta x_0+b_{10}\Delta y_0+l_{10}=v'_{10};\ p_{10}=1\\
&0\Delta x_0+0\Delta y_0+l_{1D}=v'_{1D};\ p_{1D}=1
\end{aligned} \quad (5.42)$$

$$a_{10}\Delta x_0+b_{10}\Delta y_0+0=v'_{10} \text{ cu ponderea } -\frac{1}{n_1}$$

Ultima ecuaţie poate fi scrisă conform regulei 3 printr-o ecuaţie echivalentă, dar de pondere egală cu unu şi sistemul devine:

$$\begin{aligned}
&0\Delta x_0+0\Delta y_0+l_{1A}=v'_{1A}\\
&0\Delta x_0+0\Delta y_0+l_{12}=v'_{12}\\
&a_{10}\Delta x_0+b_{10}\Delta y_0+l_{10}=v'_{10}\\
&0\Delta x_0+0\Delta y_0+l_{1D}=v'_{1D}\\
&a_{10}\frac{i}{\sqrt{n_1}}\Delta x_0+b_{10}\frac{i}{\sqrt{n_1}}\Delta y_0+0\frac{i}{\sqrt{n_1}}=v''_{10}
\end{aligned} \quad (5.43)$$

De menţionat că în sistemul (5.43) ponderile ecuaţiilor sunt egale cu 1. De asemenea, ecuaţiile scrise între punctele vechi nu mai au sens pentru că, în urma eliminării corecţiei "Δz_I", ecuaţiile nu mai conţin necunoscute şi astfel sistemul devine:

$$\begin{aligned}
&a_{10}\Delta x_0+b_{10}\Delta y_0+l_{10}=v'_{10}\\
&a_{10}\frac{i}{\sqrt{n_1}}\Delta x_0+b_{10}\frac{i}{\sqrt{n_1}}\Delta y_0+0\frac{i}{\sqrt{n_1}}=v''_{10}
\end{aligned} \quad (5.44)$$

In mod similar se pot scrie sisteme de ecuaţii pentru direcţiile din punctele "P_2" şi "P_3":

$$a_{20}\Delta x_0+b_{20}\Delta y_0+l_{20}=v'_{20}$$

$$a_{20}\frac{i}{\sqrt{n_2}}\Delta x_0 + b_{20}\frac{i}{\sqrt{n_2}}\Delta y_0 + 0\frac{i}{\sqrt{n_2}} = v''_{20}$$

$$a_{30}\Delta x_0 + b_{30}\Delta y_0 + l_{30} = v'_{30}$$

$$a_{30}\frac{i}{\sqrt{n_3}}\Delta x_0 + b_{30}\frac{i}{\sqrt{n_3}}\Delta y_0 + 0\frac{i}{\sqrt{n_3}} = v''_{30} \qquad (5.45)$$

Ecuațiile (5.44) și (5.45) formează împreună sistemul ecuațiilor de corecții aferent intersectiei multiple înainte.

Se remarcă faptul că sistemul inițial de 11 ecuații cu 5 necunoscute s-a transformat, după aplicarea regulilor 1 și 3 a lui Schreiber într-un sistem de 6 ecuații cu 2 necunoscute.

Pentru a înlătura inconvenientul de a lucra cu coeficienți imaginari în ecuațiile sumă, acestea se pot considera ecuații de pondere -1, astfel sistemul devine:

$$a_{10}\Delta x_0 + b_{10}\Delta y_0 + l_{10} = v'_{10}; \quad p = 1$$

$$a_{10}\frac{1}{\sqrt{n_1}}\Delta x_0 + b_{10}\frac{1}{\sqrt{n_1}}\Delta y_0 = v''_{10}; \quad p = -1$$

$$a_{20}\Delta x_0 + b_{20}\Delta y_0 + l_{20} = v'_{20}; \quad p = 1$$

$$a_{20}\frac{1}{\sqrt{n_2}}\Delta x_0 + b_{20}\frac{1}{\sqrt{n_2}}\Delta y_0 = v''_{20}; \quad p = -1$$

$$a_{30}\Delta x_0 + b_{30}\Delta y_0 + l_{30} = v'_{30}; \quad p = 1$$

$$a_{30}\frac{1}{\sqrt{n_3}}\Delta x_0 + b_{30}\frac{1}{\sqrt{n_3}}\Delta y_0 = v''_{30}; \quad p = -1 \qquad (5.46)$$

Rezolvarea acestui sistem se va face aplicând metodologia de rezolvare de la măsurătorile indirecte de precizii diferite.

5.2.3. Intersecția multiplă înapoi

Metoda intersecției multiple înapoi constă în măsurarea direcțiilor din punctele noi către punctele vechi. Acest lucru se întâmplă atunci când punctele noi sunt staționabile, iar punctele vechi sunt nestaționabile.

Conform fig.5.5., direcțiile măsurate sunt din punctul "P_0" către punctele P_1, P_2, ... P_5.

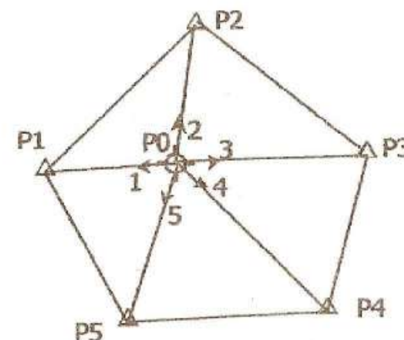


Fig.5.5.Intersecția multiplă înapoi

Pentru cele 5 direcții măsurate se scriu 5 ecuații ce formează sistemul ecuațiilor de corecții. Ca și în cazul intersecției multiple înainte, este necesar să se stabilească forma ecuației de erori corespunzătoare unei direcții măsurate.

Considerăm pentru aceasta, direcţia P_0,P_1 Această direcţie face legătura între un punct nou (variabil) şi un punct vechi (fix), deci este valabilă ecuaţia (5.9.) scrisă însă de la "P_0" la "P_1".

$$\Delta\theta_{01} - \Delta z_0 - \left(\theta_{01}^m - \theta_{01}^c\right) = v_{01} \qquad (5.47)$$

Variaţia orientării „$\Delta\theta_{01}$" se obţine după regulile prezentate la paragraful 5.1.1, pentru cazul în care $\Delta x_1 = \Delta y_1 = 0$. Astfel se obţine:

$$\Delta\theta_{01} = \rho'' \frac{\sin\theta_{01}}{s_{01}} \Delta x_0 - \rho'' \frac{\cos\theta_{01}}{s_{01}} \Delta y_0 \qquad (5.48)$$

sau:

$$\Delta\theta_{01} = -\rho'' \frac{\sin\theta_{10}}{s_{10}} \Delta x_0 + \rho'' \frac{\cos\theta_{10}}{s_{10}} \Delta y_0 \qquad (5.49)$$

Se constată, că pentru direcţia ce porneşte de la un punct nou către un punct vechi, coeficienţii de direcţie sunt egali şi de acelaşi semn cu coeficienţii de direcţie corespunzători direcţiei ce porneşte de la un punct vechi către un punct nou.

Această constatare este importantă atunci când sunt măsurate direcţii în toate punctele geodezice (vechi şi noi) caz ce se va trata în paragraful următor.

Introducând relaţia (5.48) în (5.47) , după ce în prealabil notăm coeficienţii de direcţie (coeficienţii necunoscutelor) cu a_{01}, b_{01} *iar termenul liber cu* l_{01} ,obţinem :

$$-a_{01}\Delta x_0 - b_{01}\Delta y_0 - \Delta z_0 + l_{01} = v_{01} \qquad (5.50)$$

sau:

$$a_{10}\Delta x_0 + b_{10}\Delta y_0 - \Delta z_0 + l_{01} = v_{01} \qquad (5.51)$$

în care, coeficienţii de direcţie se obţin pe baza relaţiilor:

$$\begin{aligned} -a_{01} &= \rho^{cc} \frac{\sin\theta_{01}}{D_{01}}; -b_{01} = -\rho^{cc} \frac{\cos\theta_{01}}{D_{01}} \\ a_{10} &= -\rho^{cc} \frac{\sin\theta_{10}}{D_{01}}; b_{01} = \rho^{cc} \frac{\cos\theta_{10}}{D_{01}} \end{aligned} \qquad (5.52)$$

Astfel de ecuaţii pot fi scrise pentru toate direcţiile măsurate din punctul "P_0", ecuaţii care formează sistemul:

$$\begin{aligned} &a_{10}\Delta x_0 + b_{10}\Delta y_0 - \Delta z_0 + l_{01} = v_{01} \text{ cu ponderea 1} \\ &a_{20}\Delta x_0 + b_{20}\Delta y_0 - \Delta z_0 + l_{02} = v_{02} \text{ cu ponderea 1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5.53) \\ &a_{50}\Delta x_0 + b_{50}\Delta y_0 - \Delta z_0 + l_{05} = v_{05} \text{ cu ponderea 1} \end{aligned}$$

Pentru calculul termenilor liberi se utilizează tabelul 5.2 cu precizarea că orientările calculate se obţin din coordonatele punctelor P_1, P_2, ...P_5 cunoscute şi ale punctului "P_0" stabilite în prealabil printr-o intersecţie simplă înapoi.

In sistemul ecuaţiilor de corecţii (5.53.), aplicând regulile 1 şi 3 de simplificare, sistemul poate fi scris:

$$
\begin{aligned}
&a_{10}\Delta x_0 + b_{10}\Delta y_0 + l_{01} = v_{01} \text{ cu ponderea 1}\\
&a_{20}\Delta x_0 + b_{20}\Delta y_0 + l_{02} = v_{02} \text{ cu ponderea 1}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{50}\Delta x_0 + b_{50}\Delta y_0 + l_{05} = v_{05} \text{ cu ponderea 1}\\
&\frac{[a]}{\sqrt{n}}\Delta x_0 + \frac{[b]}{\sqrt{n}}\Delta y_0 + \frac{[l]}{\sqrt{n}} = v'' \text{ cu ponderea -1}
\end{aligned}
\qquad (5.54)
$$

unde:

n = 5 - numărul direcţiilor măsurate în punctul "P_0".

[l]=0

Sistemul ecuaţiilor normale corespunzător sistemului (5.54.) se prezintă su forma:

$$
\begin{aligned}
&\left\{[aa]-\frac{[a][a]}{n}\right\}\Delta x_0 + \left\{[ab]-\frac{[a][b]}{n}\right\}\Delta y_0 + \left\{[al]-\frac{[a][l]}{n}\right\} = 0\\
&\left\{[aa]-\frac{[a][b]}{n}\right\}\Delta x_0 + \left\{[bb]-\frac{[b][b]}{n}\right\}\Delta y_0 + \left\{[bl]-\frac{[b][l]}{n}\right\} = 0
\end{aligned}
\qquad (5.55)
$$

Sistemul (5.55.) se rezolvă cu metodele prezentate în capitolul anterior, obţinând în urma calculelor corecţiile probabile Δx_0, Δy_0, care adăugate algebric la coordonatele provizorii (x_0, y_0), conduc la obţinerea coordonatele probabile ale punctului P_0 [(x_0), (y_0)].

In cazul când ecuaţiile sistemului, utilizate la încadrarea punctelor prin intersecţii multiple înapoi, se prezintă sub forma (5.50), se poate scrie:

$$
\begin{aligned}
&-a_{01}\Delta x_0 - b_{01}\Delta y_0 - \Delta z_0 + l_{01} = v_{01} \text{ cu ponderea 1}\\
&-a_{02}\Delta x_0 - b_{02}\Delta y_0 - \Delta z_0 + l_{02} = v_{02} \text{ cu ponderea 1}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-a_{05}\Delta x_0 - b_{05}\Delta y_0 - \Delta z_0 + l_{05} = v_{05} \text{ cu ponderea 1}
\end{aligned}
\qquad (5.56)
$$

Din sistemul (5.56), necunoscuta Δz_0 se elimină punând condiţiile cunoscute [v]=0 şi [l]=0, astfel prin adunare se obţine:

$$n\Delta z_0 = -[a]\Delta x_0 - [b]\Delta y_0; \quad n=5 \qquad (5.57)$$

de unde:

$$\Delta z_0 = -\frac{[a]}{n}\Delta x_0 - \frac{[b]}{n}\Delta y_0; \quad n=5 \qquad (5.58)$$

Inlocuind (5.58) în (5.56) şi efectuând notaţiile:

$$A_{0j} = \frac{[a]}{n} - a_{0j}; \quad B_{0j} = \frac{[b]}{n} - b_{0j}; \; j = 1,2,\dots,5, \qquad (5.59)$$

se obţine sistemul transformat al corecţiilor:

$$
\begin{aligned}
&A_{0j}\Delta x_0 + B_{0j}\Delta y_0 + l_{0j} = v_{0j}\\
&j = 1,2,\dots,5
\end{aligned}
\qquad (5.60)
$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii (5.60) se face după metodologia prezentată în § 4.3.2.

5.2.4. Intersecţii combinate

Intersecţiile combinate reprezintă cazul general al intersecţiilor multiple şi deci cazul general de rezolvare a triangulaţiilor geodezice prin metoda măsurătorilor indirecte. În figura 5.6 este reprezentat un asemenea caz în care sunt cunoscute coordonatele punctelor P_1, P_2, P_3, P_4 şi direcţiile măsurate şi notate cu 1, 2, ..., 20.

Punctele geodezice noi "P_0" şi "R_0" trebuie determinate ca poziţii în plan, respectiv prin coordonatele (x_{P_0}), (y_{P_0}) şi (x_{R_0}), (y_{R_0}) exprimate prin valori probabile.

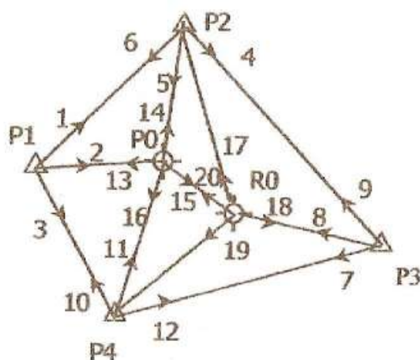


Fig.5.6. Intersecţii combinate

Într-o primă etapă de calcul, se vor obţine coordonatele provizorii x_{P_0}, y_{P_0} şi x_{R_0}, y_{R_0} ale punctelor noi folosind procedeele cunoscute ale intersecţiilor înainte şi înapoi. Corecţiile probabile ale acestor coordinate provizorii

$\Delta x_{P_0}, \Delta y_{P_0}$ şi $\Delta x_{R_0}, \Delta y_{R_0}$ se obţin din sistemul ecuaţiilor de corecţii scris pentru toate direcţiile măsurate.

.Forma ecuaţiilor fiind funcţie de natura punctelor geodezice legate printr-o direcţie de vizǎ, în cazul intersecţiilor combinate apar toate tipurile de ecuaţii prezentate în §5.1.1.

Conform direcţiilor de vizǎ în fig.5.6 se poate scrie 20 de ecuaţii cu 10 necunoscute. După aplicarea regulelor 1 şi 3 de echivalenţă sistemul de ecuaţii se reduce la 18 ecuaţii cu 4 necunoscute.

Astfel sistemul se prezintă sub forma:

$$a_2 \Delta x_{P0} + b_2 \Delta y_{P0} + l_2 = v_2$$

$$a_2 \frac{i}{\sqrt{3}} \Delta x_{P0} + b_2 \frac{i}{\sqrt{3}} \Delta y_{P_0} + 0 \frac{i}{\sqrt{3}} = v_2'$$

$$a_5 \Delta x_{P0} + b_5 \Delta y_{P0} + l_5 = v_5$$

$$a_5 \frac{i}{\sqrt{3}} \Delta x_{P0} + b_5 \frac{i}{\sqrt{3}} \Delta y_{P0} + 0 \frac{i}{\sqrt{3}} = v_2'$$

$$c_8 \Delta x_{R0} + d_8 \Delta y_{R0} + l_8 = v_8$$

$$c_8 \frac{i}{\sqrt{3}} \Delta x_{R0} + d_8 \frac{i}{\sqrt{3}} \Delta y_{R0} + 0 \frac{i}{\sqrt{3}} = v_8'$$

$$a_{11} \Delta x_{P0} + b_{11} \Delta y_{P0} + l_{11} = v_{11}$$

$$a_{11} \frac{i}{\sqrt{3}} \Delta x_{P0} + b_{11} \frac{i}{\sqrt{3}} \Delta y_{P_0} + 0 \frac{i}{\sqrt{3}} = v_{11}'$$

$$-a_{13} \Delta x_{P0} - b_{13} \Delta y_{P0} + l_{13} = v_{13}$$

$$-a_{14}\Delta x_{P0} - b_{14}\Delta y_{P0} + l_{14} = v_{14}$$
$$a_{15}\Delta x_{R0} + b_{15}\Delta y_{R0} - a_{15}\Delta x_{P0} - b_{15}\Delta y_{P0} + l_{15} = v_{15}$$
$$-a_{16}\Delta x_{P0} - b_{16}\Delta y_{P0} + l_{16} = v_{16}$$
$$a_{15}\frac{i}{\sqrt{4}}\Delta x_{R0} + b_{15}\frac{i}{\sqrt{4}}\Delta y_{R0} - i\frac{[a]}{\sqrt{4}}\Delta x_{P0} - i\frac{[b]}{\sqrt{4}}\Delta y_{P0} + 0\frac{i}{\sqrt{4}} = v'_{15}$$

$$-a_{17}\Delta x_{R0} - b_{17}\Delta y_{R0} + l_{17} = v_{17}$$
$$-a_{18}\Delta x_{R0} - b_{18}\Delta y_{R0} + l_{18} = v_{18}$$
$$-a_{19}\Delta x_{R0} - b_{19}\Delta y_{R0} + l_{19} = v_{19}$$
$$a_{20}\Delta x_{P0} + b_{20}\Delta y_{P0} - a_{20}\Delta x_{R0} - b_{20}\Delta y_{R0} + l_{20} = v_{20}$$
$$a_{12}\frac{i}{\sqrt{4}}\Delta x_{P0} + b_{20}\frac{i}{\sqrt{4}}\Delta y_{P0} - i\frac{[a]}{\sqrt{4}}\Delta x_{R0} - i\frac{[b]}{\sqrt{4}}\Delta y_{R0} + 0\frac{i}{\sqrt{4}} = v'_{20} \quad (5.61)$$

De menţionat că Dima [7] notează coeficienţii de direcţie din punctul "R" cu "c" şi "d",iar valorile acestora sunt egale cu cele ale coeficienţilor "a" şi "b" ,dar de semne contrarii. Aceste constatări, sunt deosebit de utile în calculul practic al coeficienţilor de direcţie.

Coeficienţii şi termenii liberi corespunzători celor 20 de direcţii măsurate sunt prezentaţi în tabelul 5.3

Tabelul 5.3

P.S.	P.V.	Nr. viz.	P_0		R_0		l
			a_i	b_i	c_i	d_i	
P_1	P_2 P_0 P_4	1 2 3	a_2	b_2			l_1 l_2 l_3
	$i\frac{\Sigma}{\sqrt{n_1}}$		$i\frac{a_2}{\sqrt{3}}$	$i\frac{b_2}{\sqrt{3}}$			0
P_2	P_3 P_0 P_1	4 5 6	a_5	b_5			l_4 l_5 l_6
	$i\frac{\Sigma}{\sqrt{n_2}}$		$i\frac{a_5}{\sqrt{3}}$	$i\frac{b_5}{\sqrt{3}}$			0
P_3	P_4 R_0 P_2	7 8 9			c_8	d_8	l_7 l_8 l_9
	$i\frac{\Sigma}{\sqrt{n_3}}$				$i\frac{c_8}{\sqrt{3}}$	$i\frac{d_8}{\sqrt{3}}$	0
P_4	P_1 P_0 P_3	10 11 12	a_{11}	b_{11}			l_{10} l_{11} l_{12}
	$i\frac{\Sigma}{\sqrt{n_4}}$		$i\frac{a_{11}}{\sqrt{3}}$	$i\frac{b_{11}}{\sqrt{3}}$			0
P_0	P_1 P_2 R_0 P_4	13 14 15 16	$a_{13}=a_2$ $a_{14}=a_5$ a_{15} $a_{16}=a_{11}$	$b_{13}=b_2$ $b_{14}=b_5$ b_{15} $b_{16}=b_{11}$	$c_{15}=-a_{15}$	$d_{15}=-b_{15}$	l_{13} l_{14} l_{15} l_{16}
	$i\frac{\Sigma}{\sqrt{n_{P_0}}}$		$i\frac{[a]}{\sqrt{4}}$	$i\frac{[b]}{\sqrt{4}}$	$i\frac{c_{15}}{\sqrt{4}}$	$i\frac{d_{15}}{\sqrt{4}}$	0
R_0	P_2 P_3 P_4 P_0	17 18 19 20	$a_{20}=a_{15}$	$b_{20}=b_{15}$	c_{17} $c_{18}=c_8$ c_{19} $c_{20}=c_{15}$	d_{17} $d_{18}=d_8$ d_{19} $d_{20}=d_{15}$	l_{17} l_{18} l_{19} l_{20}

			P_0		R_0		
	$\frac{i\ \Sigma}{\sqrt{n_{R_0}}}$		$i\frac{a_{20}}{\sqrt{4}}$	$i\frac{b_{20}}{\sqrt{4}}$	$i\frac{[c]}{\sqrt{4}}$	$i\frac{[d]}{\sqrt{4}}$	0

Rezolvarea sistemului de ecuații se realizează conform metodologiei prezentate în § 4.3.2.

5.2.5. Controlul rezolvării rețelei geodezice și calculul preciziei.

Teoria măsurătorilor indirecte aplicată la rezolvarea problemelor geodezice impune verificarea calculelor pe parcursul efectuării lor și la diferite etape.

Aceste verificări se realizează prin controalele specificate la formarea sistemului de ecuații al corecțiilor și la rezolvarea acestui sistem .

Controlul final al rezolvării rețelei geodezice constă în verificarea orientărilor direcțiilor de legătură a punctelor geodezice.

Astfel, se poate obține valoarea orientării pentru o direcție oarecare folosind coordonatele probabile ale punctului determinat.

De exemplu, pentru direcția P_1P_0 (fig.5.4), valoarea orientării "(θ_{10}) ". rezultă din egalitatea:.

$$(\theta_{10}) = \theta_{10}^{c} + \Delta\theta_{10} \tag{5.62}$$

în care θ_{10}^{c} se obține utilizând coordonatele provizorii ale punctului "P_0", iar $\Delta\theta_{10}$ se obține din egalitatea

$$\Delta\theta_{10} = a_{10}\Delta x_0 + b_{10}\Delta y_0 \tag{5.63}$$

în care $\Delta x_0, \Delta y_0$ sunt corecțiile probabile determinate.

Pentru calculul preciziei se folosesc relațiile:

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-k}}$$
$$m_{\Delta x_0} = \pm m_0\sqrt{Q_{11}};\ m_{\Delta y_0} = \pm m_0\sqrt{Q_{22}}; \tag{5.64}$$

n = numărul de ecuații de corecții din sistemul inițial de ecuații (nesimplificat);

k = numărul de necunoscute din același sistem de ecuații;

Q_{11}, Q_{22} = coeficienți de pondere care se stabilesc după metoda arătată la teoria măsurătorilor indirecte.

5.2.6.EXEMPLE DE CALCUL

Intersecția multiplă înainte

Se cunosc coordonatele punctelor din rețeaua de triangulație de ordin superior (tabelul 5.4), fig.5.7, precum și direcțiile măsurate, centrate și reduse în planul de proiecție Stereografic 70 ,tabelul 5.5.

Coordonatele provizorii ale punctului "P_0" se determină prin intersecții simple înainte , iar valorile acestora sunt prezentate în tabelul 5.6.

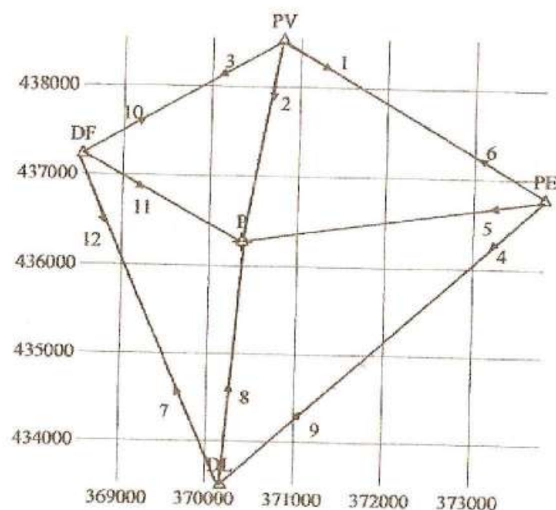


Fig.5.7.Intersecția multiplă înainte

Tabelul 5.4

Denumirea punctului	Coordonate Stereo 70	
	X	Y
PE	436794,70	373805,78
PV	438543,03	370799,25
DF	437243,38	368543,76
DM	431245,33	374022,57
DL	433535,43	370176,05
Chicera	438520,800	369020,090

Tabelul 5.5

P		Nr.	Direcții. măsurate.
P.S	P.V	vizei	r_i
	PE	1	130,5304
PV	P_0	2	208,9364
	DF	3	263,7202
	DL	4	248,4205
PE	P_0	5	285,6592
	PV	6	328,5324
	DF	7	361,6010
DL	P_0	8	392,5095
	PE	9	41,4203
	PV	10	51,7201
DF	P_0	11	115,6895
	DL	12	158,6009

Tabelul 5.6

Denumirea punctului	Coordonate provizorii	
	X	Y
P_0	436287,150	370371,235

In tabelul 5.7 se prezintă calculul orientărilor, distanțelor, coeficienților de direcție si verificarea acestora.

In tabelul 5.8 se calculează orientarea direcției zero a limbului (modulul stației) și termenii liberi .

Conform 5.1.2 și a figurii 5.7., numărul de ecuații de erori este egal cu numărul vizelor (12), iar necunoscutele principale sunt 6 (Δx_{P0}, Δy_{P0}, Δz_{PV}, Δz_{PE}, Δz_{DL}, Δz_{DF}).

Aplicând regulile 1 și 3 ale lui Schreiber vom obține un sistem echivalent de 8 ecuații cu 2 necunoscute (.Δx_{P0}, Δy_{P0}), a căror coeficienți sunt prezentați în tabelul 5.9.

De menționat, în tabelul 5.9 sunt trecuți și termenii liberi corespunzători ecuațiilor scrise între două puncte vechi. Se verifică astfel condiția ca suma termenilor liberi într-un punct de stație să fie egală cu zero.

In tabelul 5.9 coeficienții de direcție au fost reduși de 100 ori față de cei calculați în tabela 5.7, pentru a lucra cu valori mai mici și a ușura, astfel, calculele. Având în vedere acest lucru, corecțiile Δx și Δy se vor obține în "cm" și nu în "m".

Aceiași termini liberi apar și în tabelul 5.10, pentru a putea calcula [*II*].

Tabelul 5.7

Pct.	Coordonate		tg θ	sin θ	D= Δx/cos θ	a	Control
	X	Y	ctg θ	cos θ	D= Δy/sin θ	b	a/b=-tg θ
	[m]	[m]	θ		$D=\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2}$		b/a=-ctg θ
PV	438543,030	370799,250	-1,719658188	0,8644637	3477,913229	-158,2371	1,719658
PE	436794,700	373805,780	-0,581510911	-0,5026952	3477,913229	-92,0166	0,581511
Δ	-1748,330	3006,530	133,5316		3477,913229		
PV	438543,030	370799,250	0,189733053	-0,1864075	2296,125305	51,6830	-0,189733
P0	436287,150	370371,235	5,270562948	-0,9824725	2296,125305	-272,3987	-5,270563
Δ	-2255,880	-428,015	211,9369		2296,125305		
PV	438543,030	370799,250	1,735459547	-0,8664505	2603,13758	211,8980	-1,735460
DF	437243,380	368543,760	0,576216255	-0,4992628	2603,13758	-122,0991	-0,576216
Δ	-1299,650	-2255,490	266,7208		2603,13758		
PE	436794,700	373805,780	1,113663489	-0,7440568	4878,296917	97,0998	-1,113663
DL	433535,430	370176,050	0,897937312	-0,6681163	4878,296917	-87,18949	-0,897937
Δ	-3259,270	-3629,730	253,4202		4878,296917		
PE	436794,700	373805,780	6,766909664	-0,9892564	3471,844806	181,3965	-6,766910
P0	436287,150	370371,235	0,147777944	-0,1461902	3471,844806	-26,8064	-0,147778

Δ	-507,550	-3434,545	290,6598		3471,844806		
PE	436794,700	373805,780	-1,719658188	-0,8644637	3477,913229	158,2371	1,719658
PV	438543,030	370799,250	-0,581510911	0,5026951	3477,913229	92,0166	0,581511
Δ	1748,330	-3006,530	333,5316315		3477,913229		
DL	433535,430	370176,050	-0,440213595	-0,4029023	4051,328652	63,3115	0,440214
DF	437243,380	368543,760	-2,271624528	0,9152429	4051,328652	143,8199	2,271625
Δ	3707,950	-1632,290	373,6002814		4051,328652		
DL	433535,430	370176,050	0,070931999	0,0707542	2758,633746	-16,3282	-0,070932
P0	436287,150	370371,235	14,09800958	0,9974937	2758,633746	230,1953	-14,098010
Δ	2751,720	195,185	4,508120774		2758,633746		
DL	433535,430	370176,050	1,113663489	0,7440568	4878,296917	-97,0998	-1,113663
PE	436794,700	373805,780	0,897937312	0,6681163	4878,296917	87,1895	-0,897937
Δ	3259,270	3629,730	53,42016573		4878,296917		
DF	437243,380	368543,760	1,735459547	0,8664505	2603,13758	-211,8980	-1,735460
PV	438543,030	370799,250	0,576216255	0,4992628	2603,13758	122,0991	-0,576216
Δ	1299,650	2255,490	66,72083846		2603,13758		
DF	437243,380	368543,760	-1,911124939	0,8860344	2062,532591	-273,4828	1,911125
P0	436287,150	370371,235	-0,523252028	-0,4636193	2062,532591	-143,1005	0,523252

Δ	-956,230	1827,475	130,6898941		2062,532591		
DF	437243,380	368543,760	-0,440213595	0,4029023	4051,328652	-63,31155	0,440214
DL	433535,430	370176,050	-2,271624528	-0,9152429	4051,328652	-143,8199	2,271625
Δ	-3707,950	1632,290	173,6002814		4051,328652		

Tabelul 5.8

P		Nr.	Dir. masurate.	Orient.	$Z_i = \theta^o - r_i$	$z=[\theta^o - r_i]/n$	$\theta^m = z+r_i$	$l_i=-(\theta^m-\theta^o)$
P.S	P.V	vizei	r_i	calc. (θ^o)	[g.c.cc]	[g.c.cc]	[g.c.cc]	[cc]
	PE	1	130,5304	133,5316	3,0012		133,5312	4,333
PV	P_0	2	208,9364	211,9369	3,0005	3,0007667	211,9372	-2,667
	DF	3	263,7202	266,7208	3,0006		266,7210	-1,667
	[ ]				9,0023			0,000
	DL	4	248,4205	253,4202	4,9997		253,4203	-1,547
PE	P_0	5	285,6592	290,6598	5,0006	4,9998204	290,6590	7,436

	PV	6	328,5324	333,5316	4,9992		333,5322	-5,890
	[ ]				14,9995			0,000
	DF	7	361,6010	373,6003	11,9993		373,6003	0,254
DL	P_0	8	392,5095	4,5081	11,9986	11,9992560	4,5088	-6,352
	PE	9	41,4203	53,4202	11,9999		53,4196	6,098
	[ ]				35,9978			0,000
	PV	10	51,7201	66,7208	15,0007		66,7203	5,672
DF	P_0	11	115,6895	130,6899	15,0004	15,0001713	130,6897	2,228
	DL	12	158,6009	173,6003	14,9994		173,6011	-7,900
	[ ]				45,0005			0,000

Tabelul 5.9

P.S.	P.V.	Nr. viza	P_0		l_i
			a_i	b_i	
PV	PE	1			4,333
	P_0	2	0,5168	-2,7240	-2,667
	DF	3			-1,667
	$i\frac{[\ ]}{\sqrt{n_1}}$	$i\frac{[\ ]}{\sqrt{3}}$	i 0,2984	-i 1,5727	0,000
PE	DL	4			4,333
	P_0	5	1,8140	-0,2681	-2,667
	PV	6			-1,667
	$i\frac{[\ ]}{\sqrt{n_3}}$	$i\frac{[\ ]}{\sqrt{3}}$	i 1,0473	-i 0,1548	0,000
DL	DF	7			0,254
	P_0	8	-0,1633	2,3020	-6,352
	PE	9			6,098
	$i\frac{[\ ]}{\sqrt{n_2}}$	$i\frac{[\ ]}{\sqrt{3}}$	-i 0,0943	i 1,3290	0,000
DF	PV	10			5,672
	P_0	11	-2,7348	-1,4310	2,228
	DL	12			-7,900
	$i\frac{[\ ]}{\sqrt{n_4}}$	$i\frac{[\ ]}{\sqrt{3}}$	- i 1,5790	- i 0,8262	0,000

In tabelul 5.10 se prezintă schema redusă de calcul a coeficienților ecuațiilor normale a lui Gauss.

Pentru ecuațiile sumă apar termenii în "i", ce reprezintă radical din " -1" .

Datorită produselor duble, ce apar la calculul coeficienților, termenii în " i " se trsnsformă în "-1"

Tabelul 5.10

Nr.crt.	Nr. viza	a	b	l	s
1	1			4,3333	4,3333
2	2	0,5168	-2,7240	-2,6667	-4,8738
3	3			-1,6667	-1,6667
4	[ ]	0,2984 i	-i1,5727	0	-1,2743 i
5	4			4,3333	4,3333
6	5	1,8140	-0,2681	-2,6667	-1,1208
7	6			-1,6667	-1,6667
8	[ ]	1,0473 i	-0,1548 i	0	0,8925 i
9	7			0,2540	0,2540
10	8	-0,1633	2,3020	-6,3518	-4,2131
11	9			6,0978	6,0978
12	[ ]	-0,0943 i	1,3290 i	0	1,2348 i
13	10			5,6716	5,6716
14	11	-2,7348	-1,4310	2,2280	-1,9379
15	12			-7,8996	-7,8996
16	[ ]	-1,5790 i	-0,8262 i	0	-2,4051 i
	[ ]	-0.5673 -0.3275 i	-2.1211 -1.2246 i	-9.4571 +0.0000 i	-12.1456 -1.5522 i
[a		7,3757	1,0957	-11,2714	-2,8000
[b			9,8925	-9,8309	1,1573
[l				234,4598	213,3574

Pe baza coeficienților calculți în tabelul 5.10 se scrie sistemul normal redus al ecuațiilor nomale:

$$7.3757\Delta x + 1.0957\Delta y - 11.2714 = 0$$

$$9.8925\Delta y - 9.8309 = 0$$

Rezolvarea sistemului se poate realiza pe baza metodelor cunoscute de la cursul de Teoria de prelucrare a mărimilor măsurate, iar în tabelul 5.11 se prezintă rezolvarea sistemului prin schema triunghiulară Gauss-Doolittle.

Tabelul 5.11

[aa]	[ab]	[al]	[as]	control	Q11	Q22
7,3757	1,0957	-11,2714	-2,8000	-2,8000	-1	0
-1	-0,14855889	1,5281876	0,379628709	0,379628709	0,135581	0
$\Delta x = 1.4036$	9,8925	-9,8309	1,1573	1,1573	0	-1
	-0,16277951	1,6744715	0,415968207	0,415968207	0,148559	0
	9,72970511	-8,156465	1,573240111	1,573240111	0,148559	-1
	-1	0,8383055	-0,161694532	-0,161694532	-0,01527	0,102778
Δy=	0,8383	234,45978	213,3574123	Qii	0,1378	0,1028
		-17,224864	-4,278959483			
		-6,8376092	1,318855788			
	[v v]=	210,3973	210,3973086			

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-k}} = \pm\sqrt{\frac{210.3973}{12-6}} = \pm 5^{cc},922$$

$$m_{\Delta x} = m_0\sqrt{Q_{11}} = 5.922.\sqrt{0.1378} = \pm 2.199\ cm$$

$$m_{\Delta x} = m_0\sqrt{Q_{22}} = 5.922.\sqrt{0.1028} = \pm 1.898\ cm$$

Cu ajutorul corecțiilor Δx și Δy se vor calcula valorile cele mai probabile a punctului „P_0" încadrat prin metoda intersecțiilor multiple înainte:

$$(X_{P_0}) = X_0 + \Delta x = 436287.150 + 0.014036 = 436287.164\ m$$

$$(Y_{P_0}) = Y_0 + \Delta y = 370371,235 + 0,0083 = 370371,243\ m$$

Pentru controlul încadrării punctului "P_0", va trebui ca orientările calculate din punctele vechi și coordonatele compensate ale punctului nou să fie egale cu orientările provizorii plus corecțiile Δθ.

Tabelul 5.12.

Punct	Coordonate definitive		Orient.def.
	X	Y	(θ)
	[m]	[m]	g.c.cc.
1	2	3	4
PV	438543,0300	370799,2500	
P_0	436287,1640	370371,2434	211,9367
Δ	-2255,8660	-428,0066	

a b	Δx Δy	Δθ=a Δx+b Δy	Orient.def. (θ)= θ^c+ Δθ
[cc / cm]	[cm]	[cc]	[cc]
5	6	7	8
0,5168	1,4036		
-2,7240	0,8383	-1,5580	211,9367

Pentru ca, în ecuațiile sumă să nu apară termenul imaginar "i" se pot considera aceste ecuații de pondere -1, astfel sistemul se prezintă sub forma:

$$\begin{aligned}
&a_2\Delta x_0 + b_2\Delta y_0 + l_2 = v_2; && p_1 = 1\\
&\frac{a_2}{\sqrt{3}}\Delta x_0 + \frac{b_2}{\sqrt{3}}\Delta y_0 + 0 = v'_2; && p_2 = -1\\
&a_5\Delta x_0 + b_5\Delta y_0 + l_5 = v_5; && p_3 = 1\\
&\frac{a_5}{\sqrt{3}}\Delta x_0 + \frac{b_5}{\sqrt{3}}\Delta y_0 + 0 = v'_5; && p_4 = -1 \qquad (5.63)\\
&a_8\Delta x_0 + b_8\Delta y_0 + l_8 = v_8; && p_5 = 1\\
&\frac{a_8}{\sqrt{3}}\Delta x_0 + \frac{b_8}{\sqrt{3}}\Delta y_0 + 0 = v'_8; && p_6 = -1\\
&a_{11}\Delta x_0 + b_{11}\Delta y_0 + l_{11} = v_{11}; && p_7 = 1\\
&\frac{a_{11}}{\sqrt{3}}\Delta x_0 + \frac{b_{11}}{\sqrt{3}}\Delta y_0 + 0 = v'_{11}; && p_8 = -1
\end{aligned}$$

Coeficienții necunoscutelor sunt cei din tabelul 5.10.cu specificația că în ecuațiile sumă nu mai apare termenii imaginari "i", în schimb aceste ecuații vor avea ponderea -1

Rezolvarea sistemului de corecții (5.63.) se mai poate realiza și în mod matriceal conform teoriei prezentată în § 4.3.3.1, astfel se poate scrie:

$$x = \left(A^T pA\right)^{-1} A^T pl$$

Valorile rezultate din calcul coeficienților sunt prezentate în matricele următoare:

$$A=\begin{pmatrix} 0.5168 & -2.7240 \\ 0.2984 & -1.5727 \\ 1.8140 & -0.2681 \\ 1.0473 & -0.1548 \\ -0.1633 & 2.3020 \\ -0.0943 & 1.3290 \\ -2.7348 & -1.4310 \\ -1.5790 & -0.8262 \end{pmatrix};\ p=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix};$$

$$l=\begin{pmatrix} 2.6667\\ 0\\ 2.6667\\ 0\\ 6.3518\\ 0\\ -2.228\\ 0 \end{pmatrix};\ x=\begin{pmatrix}\Delta x_0\\ \Delta y_0\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix} 0.517 & 0.298 & 1.814 & 1.047 & -0.163 & -0.094 & -2.735 & -1.579 \\ -2.724 & -1.573 & -0.268 & -0.155 & 2.302 & 1.329 & -1.431 & -0.826 \end{pmatrix}$$

$$A^T p=\begin{pmatrix} 0.517 & -0.298 & 1.814 & -1.047 & -0.163 & 0.094 & -2.735 & 1.579 \\ -2.724 & 1.573 & -0.268 & 0.155 & 2.302 & -1.329 & -1.431 & 0.826 \end{pmatrix}$$

$$A^T pA=\begin{pmatrix} 7.375 & 1.096 \\ 1.096 & 9.893 \end{pmatrix};\qquad A^T pl=\begin{pmatrix} 11.271 \\ 9.831 \end{pmatrix}$$

$$(A^T pA)^{-1}=\begin{pmatrix} 0.138 & -0.015 \\ -0.015 & 0.103 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Delta x_0\\ \Delta y_0\end{pmatrix}=\left(A^T pA\right)^{-1} A^T pl=\begin{pmatrix} 1.404 \\ 0.838 \end{pmatrix}$$

Valorile corecțiilor rezultate din calcul sunt exprimate în centimetri și în funcție de acestea se determină valorile cele mai probabile ale punctului încadrat:

$$X_P = 436287{,}150+0.014=436287{,}164 \text{ m}$$
$$Y_P = 370371{,}235+0.008=370371{,}243 \text{ m}$$

Se remarcă faptul că, în urma efectuării calculelor prin metoda matriceală, aplicată în cazul măsurătorilor indirecte de precizii diferite, s-au obținut aceleași valori ca și în cazul rezolvării sistemului prin metoda Gauss-Doolittle.

De precizat că, metoda de rezolvare Gauss necesită, mai întâi, transformarea sistemului de ecuații într-un sistem normal, și numai după aceea se trece la rezolvarea acestuia.

Intersecția multiplă înapoi

Pentru încadrarea punctului "R_0" (fig.5.8) prin metoda intersecțiilor multiple înapoi, se cunosc punctele rețelei de triangulație, date în tabelul 5.4(prezentat la intersecția multiplă înainte) și direcțiile măsurate prezentate în tabelul (5.13).

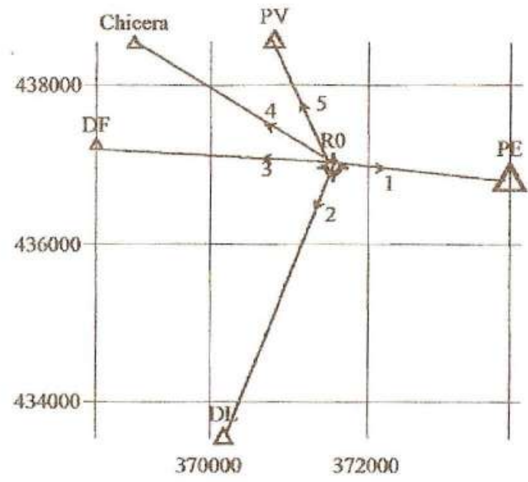


Fig.5.8 Intersecția multiplă înapoi

Tabelul 5.13.

Punct		Nr.	Dir. mas.
S	V	vizei	r_i
	PE	1	324,7038
	DL	2	44,3008
R_0	DF	3	125,9486
	Chicera	4	155,1480
	PV	5	191,7405

Tabelul 5.14

Denumirea punctului	Coordonate provizorii	
	X	Y
R_0	436961,553	371551,335

Tabelul 5.15

Pct.	Coordonate		tg θ	sin θ	D= Δx/cos θ	a	Control
	X	Y	ctg θ	cos θ	D= Δy/sin θ	b	a/b=-tg θ-
	[m]	[m]	θ°		$D=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$		b/a=-ctg θ
R_0	436961,553	371551,335	-0,47555861	-0,429468	1751,2000	-1,561262	0,475559
PV	438543,03	370799,25	-2,10279024	0,903082	1751,2000	-3,283006	2,102790
Δ	1581,477	-752,085	371,7402		1751,2000	0,000000	
R_0	436961,553	371551,335	-13,5115641	0,997272	2260,6110	2,808460	13,511564
PE	436794,7	373805,78	-0,07401068	-0,073809	2260,6110	0,207856	0,074011
Δ	-166,853	2254,445	104,7031		2260,6110	0,000000	
R_0	436961,553	371551,335	0,40141145	-0,372520	3691,8461	-0,642371	-0,401411
DL	433535,43	370176,05	2,49120946	-0,928024	3691,8461	1,600280	-2,491209
Δ	-3426,123	-1375,285	224,3012		3691,8461	0,000000	
R_0	436961,553	371551,335	-10,6717064	-0,995638	3020,7505	-2,098297	10,671706
DF	437243,38	368543,76	-0,09370573	0,093297	3020,7505	-0,196622	0,093706
Δ	281,827	-3007,575	305,9481		3020,7505	0,000000	

R_0	436961,553	371551,335	-1,62337654	-0,851424	2972,9535	-1,823216	1,623377
Chicera	438520,800	369020,090	-0,61600003	0,524477	2972,9535	-1,123101	0,616000
Δ	1559,247	-2531,245	335,1479		2972,9535	0,000000	

Tabelul 5.16.

P		Nr. vizei	Dir. masurate.	Orient. calc. θ^c	$Z_i=\theta^c - r_i$ [g.c.cc]	$z=[\theta^c - r_i]/n$ [g.c.cc]	$\theta^m=\omega_0 + r_i$ [g.c.cc]	$l_i=-(\theta^m-\theta^c)$ [cc]
P.S.	P.V.		r_i					
	PE	1	324,7038	104,7031	179,9993		104,7036	-4,638
	DL	2	44,3008	224,3012	180,0004		224,3006	6,573
R_0	DF	3	125,9486	305,9481	179,9995	179,9998	305,9484	-2,324
	Cicera	4	155,1480	335,1479	179,9999		335,1478	1,011
	PV	5	191,7405	371,7402	179,9997		371,7403	-0,622
	[ ]				899,9988			0,000

Coordonatele provizorii ale punctului "R_0" se determină prin intersecții simple înapoi (prezentate la cursul de Topografie generală), iar valorile acestora sunt date în tabelul 5.14.

In tabelul 5.15 se prezintă calculul orientărilor, distanțelor, coeficienților de direcție și verificarea acestora.

In tabelul 5.16 se calculează orientarea direcției zero a limbului (modulul stației) și termenii liberi .

Coeficienții ecuațiilor echivalente de erori (în care lipsește Δz) se prezintă în tabelul 5.17.

Tabelul 5.17

P.S.	P.V.	Nr. vizei	P_0		l_i
			a_i	b_i	
	PE	1	2,8085	0,2079	-4,638
	DL	2	-0,6424	1,6003	6,573
R_0	DF	3	-2,0983	-0,1966	-2,324
	Chicera	4	-1,8232	-1,1231	1,011
	PV	5	-1,5613	-3,2830	-0,622
[ ]	$i\frac{[a_i]}{\sqrt{n}};n=5$		-1.4833	-1.2498	0,000

In tabelul 5.18 se prezintă tabelul redus de calcul al coeficienților ecuațiilor normale.

Tabelul 5.18

Nr.crt.	Nr. viză	a	b	l	s
1	1	2.8085	0.2079	-4.6379	-1.6215
2	2	-0.6424	1.6003	6.5726	7.5305
3	3	-2.0983	-0.1966	-2.3241	-4.6190

4	4	-1.8232	-1.1231	1.0112	-1.9351
5	5	-1.5613	-3.2830	-0.6219	-5.4661
6	[ ]i	-1.4833	-1.2498	0.000	-2.7330
[ ]		-3.3167	-2.7946	0.0000	-6.1113
[ ]i		-1.4833	-1.2498	0.0000	-2.7330
		16.2645	2.5998	-13.2434	8.3090
			13.1203	10.9170	29.3252
				71.5199	69.1935

Rezolvarea ecuaţiilor normale utilizând schema triunghiulară Gauss Doolittle se prezintă în tabelul 5.19.

Tabelul 5.19

[aa]	[ab]	[al]	[as]	control	Q11	Q22
16.2645	2.5998	-13.2434	5.6209	5.6209	-1.0000	0.0000
-1	-0.1598	0.8143	-0.3456	-0.3456	0.0615	0.0000
0.9782	13.1203	10.9170	26.6371	26.6371	0.0000	-1.0000
	-0.4156	2.1169	-0.8985	-0.8985	0.1598	0.0000
	12.7047	13.0339	25.7386	25.7386	0.1598	-1.0000
	-1.0000	-1.0259	-2.0259	-2.0259	-0.0126	0.0787
Δy=	-1.0259	71.5199	69.1935		0.0635	0.0787
		-10.7835	4.5768			
		-13.3715	-26.4054		m_0=	4.8665
	[v v]=	47.3649	47.3649		m_{dx}=	1.2263
					m_{dy}=	1.3653

Tabelul 5.20

Pct.	Coordonate provizorii		Coordonate definitive	
	X	Y	X	Y
R0	436961.553	371551.335	436961.563	371551.325

Verificarea încadrării punctului R_0 se realizează în tabelul 5.21, prin calculul orientărilor din coordonatele definitive ale punctului încadrat şi compararea acestora cu orientările calculate din corecţiile Δx, Δy şi coeficienţii de direcţie.

Tabelul 5.21

Punct	Coordonate definitive		θ^c
	X	Y	(θ)
	[m]	[m]	g.c.cc.
1	2	3	4
R0	436961.563	371551.325	-95.2967
PE	436794.700	373805.780	**104.7033**
Δ	-166.863	2254.455	
R0	436961.563	371551.325	24.3010
DL	433535.430	370176.050	**224.3010**
Δ	-3426.133	-1375.275	
R0	436961.563	371551.325	-94.0521
DF	437243.380	368543.760	**305.9479**
Δ	281.817	-3007.565	

a	Δx		Orient.def.
b	Δy	Δθ=a Δx+b Δy	$(\theta)=\theta^c+\Delta\theta$
[cc / cm]	[cm]	[cc]	[cc]
5	6	7	8
2.8085	0.9782		
0.2079	-1.0259	2.534	**104.7033**
-0.6424	0.9782		
1.6003	-1.0259	-2.270	**224.3010**
-2.0983	0.9782		
-0.1966	-1.0259	-1.851	**305.9479**

Intersecţia multiplă combinată

Partea teoretică de rezolvare a problemei a fost prezentată la § 5.1.4, iar rezolvarea practică se referă la exemplul ilustrat în fig.5.8.

Se remarcă faptul că, se utilizează aceeaşi reţea de triangulaţie şi se încadrează aceleaşi puncte , pentru a avea criterii de comparaţie între rezultatele obţinute, prin diferitele metode şi pentru a utiliza valorile provizorii de încadrare a punctelor obţinute prin metodele anterioare.

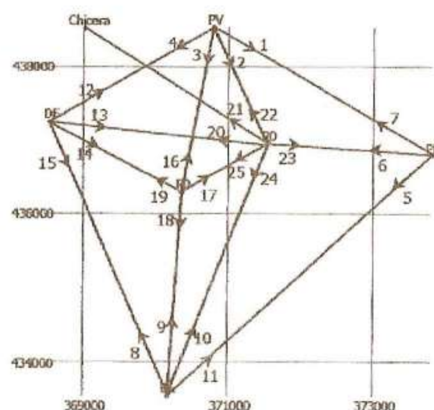


Fig.5.8 Intersecţia multiplă combinată

In exemplu numeric de rezolvare a intersecţiei multiple combinate se urmează aceeaşi cale de rezolvare ca şi la metodele anterioare. Astfel, în tabelul 5.4 se dau coordonatele punctelor de triangulaţie. In tabelul 5.22 sunt trecute valorile

medii ale seriilor complete reiterate.Valorile provizorii ale coordonatelor punctelor "P" şi "R" sunt preluate de la metodele anterioare şi sunt date în tabelul 5.23.

Coeficienţii de direcţie, orientarea direcţiei zero a limbului şi termenii liberi sunt date în tabelul 5.24. Coeficienţii de direcţie şi termenii liberi sunt calculaţi în tabelul 5.25.

Coeficienţi ecuaţiilor echivalente sunt prezentaţi în tabelul 5.26.

Coeficienţii ecuaţiilor normale se calculează în tabelul 5.27, iar rezolvarea sistemului în tabelul 5.28.In tabelul 5.29. se prezintă coordonatele definitive ale punctelor încadrate.

Verificarea rezultatelor se va face în tabelul 5.30, iar valorile comparative al punctelor încadrate sunt prezentate în tabelul 5.31.

Tabelul 5.22

P		Nr.	Dir. mas.
P.S	P.V	vizei	r_i
PV	PE	1	130,5304
	R_0	2	168,7392
	P_0	3	208,9364
	DF	4	263,7202
PE	DL	5	248,4205
	R_0	6	285,6605
	PV	7	328,5328
DL	DF	8	361,601
	P_0	9	392,5095
	R_0	10	12,3026
	PE	11	41,4213
	PV	12	51,7201

Intersecţia multiplă combinată

Partea teoretică de rezolvare a problemei a fost prezentată la § 5.1.4, iar rezolvarea practică se referă la exemplul ilustrat în fig.5.8.

Se remarcă faptul că, se utilizează aceeaşi reţea de triangulaţie şi se încadrează aceleaşi puncte , pentru a avea criterii de comparaţie între rezultatele obţinute, prin diferitele metode şi pentru a utiliza valorile provizorii de încadrare a punctelor obţinute prin metodele anterioare.

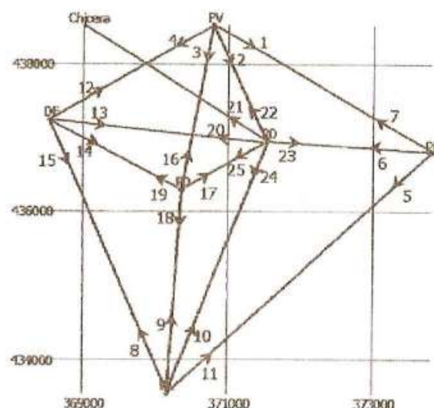


Fig.5.8 Intersecţia multiplă combinată

In exemplu numeric de rezolvare a intersecţiei multiple combinate se urmează aceeaşi cale de rezolvare ca şi la metodele anterioare. Astfel, în tabelul 5.4 se dau coordonatele punctelor de triangulaţie. In tabelul 5.22 sunt trecute valorile

medii ale seriilor complete reiterate.Valorile provizorii ale coordonatelor punctelor "P" şi "R" sunt preluate de la metodele anterioare şi sunt date în tabelul 5.23.

Coeficienţii de direcţie, orientarea direcţiei zero a limbului şi termenii liberi sunt date în tabelul 5.24. Coeficienţii de direcţie şi termenii liberi sunt calculaţi în tabelul 5.25.

Coeficienţi ecuaţiilor echivalente sunt prezentaţi în tabelul 5.26.

Coeficienţii ecuaţiilor normale se calculează în tabelul 5.27, iar rezolvarea sistemului în tabelul 5.28.In tabelul 5.29. se prezintă coordonatele definitive ale punctelor încadrate.

Verificarea rezultatelor se va face în tabelul 5.30, iar valorile comparative al punctelor încadrate sunt prezentate în tabelul 5.31.

Tabelul 5.22

P		Nr.	Dir. mas.
P.S	P.V	vizei	r_i
PV	PE	1	130,5304
	R_0	2	168,7392
	P_0	3	208,9364
	DF	4	263,7202
PE	DL	5	248,4205
	R_0	6	285,6605
	PV	7	328,5328
DL	DF	8	361,601
	P_0	9	392,5095
	R_0	10	12,3026
	PE	11	41,4213
	PV	12	51,7201

	R_0	13	90,9476
	P_0	14	115,6895
	DL	15	158,6009
P_0	PV	16	21,2342
	R_0	17	76,2453
	DL	18	213,8054
	DF	19	339,9874
R_0	DF	20	25,4236
	Chicera	21	54,6236
	PV	22	91,216
	PE	23	224,1789
	DL	24	343,7761
	P_0	25	386,4228

Tabelul 5.23.

Pct	X	Y
P_0	436287,150	370371,235
R_0	436961,553	371551,335

Tabelul 5.24

Punct	Coordonate		tg θ	sin θ	D= dx/cos θ	a	Control
	X	Y	ctg θ	cos θ	D= dy/sin θ	b	a/b=-tg θ
	[m]	[m]	θ °		$D=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$		b/a=-ctg θ
PV	438543,030	370799,250	-1,7196582	0,8644638	3477,913229	-1,5824	1,7197
PE	436794,700	373805,780	-0,581511	-0,50269512	3477,913229	-0,9202	0,5815
Δ	-1748,330	3006,530	133,5316		3477,913229	0,0000	
PV	438543,030	370799,250	-0,47555861	0,42946837	1751,199974	-1,5613	0,4756
R_0	436961,553	371551,335	-2,10279021	-0,90308190	1751,199974	-3,2830	2,1028
Δ	-1581,477	752,085	171,7402		1751,199974	0,0000	
PV	438543,030	370799,250	0,189733053	-0,18640751	2296,125305	0,5168	-0,1897
P_0	436287,150	370371,235	5,270562948	-0,98247251	2296,125305	-2,7240	-5,2706
Δ	-2255,880	-428,015	211,9369		2296,125305	0,0000	
PV	438543,030	370799,250	1,735459547	-0,86645056	2603,13758	2,1190	-1,7355
DF	437243,380	368543,760	0,576216255	-0,49926289	2603,13758	-1,2210	-0,5762

Δ	-1299,650	-2255,490	266,7208		2603,13758	0,0000	
PE	436794,700	373805,780	1,113663489	-0,74405680	4878,296917	0,9710	-1,1137
DL	433535,430	370176,050	0,897937312	-0,66811636	4878,296917	-0,8719	-0,8979
Δ	-3259,270	-3629,730	253,4202		4878,296917	0,0000	
PE	436794,700	373805,780	6,766909664	-0,98925649	3471,844806	1,8140	-6,7669
R_0	436287,150	370371,235	0,147777944	-0,14619029	3471,844806	-0,2681	-0,1478
Δ	-507,550	-3434,545	290,6598		3471,844806	0,0000	
PE	436794,700	373805,780	-1,7196582	-0,86446378	3477,913229	1,5824	1,7197
PV	438543,030	370799,250	-0,58151092	0,50269512	3477,913229	0,9202	0,5815
Δ	1748,330	-3006,530	333,5316315		3477,913229	0,0000	
DL	433535,430	370176,050	-0,4402136	-0,40290239	4051,328652	0,6331	0,4402
DF	437243,380	368543,760	-2,2716246	0,91524295	4051,328652	1,4382	2,2716
Δ	3707,950	-1632,290	373,6002814		4051,328652	0,0000	
DL	433535,430	370176,050	0,070931999	0,07075423	2758,633746	-0,1633	-0,0709
P_0	436287,150	370371,235	14,09800958	0,99749378	2758,633746	2,3020	-14,0980
Δ	2751,720	195,185	4,508120774		2758,633746	0,0000	
DL	433535,430	370176,050	0,40141145	0,37251959	3691,846102	-0,6424	-0,4014

R_0	436961,553	371551,335	2,491209458	0,92802433	3691,846102	1,6003	-2,4912
Δ	3426,123	1375,285	24,30121238		3691,846102	0,0000	
DL	433535,430	370176,050	1,113663489	0,74405680	4878,296917	-0,9710	-1,1137
PE	436794,700	373805,780	0,897937312	0,66811636	4878,296917	0,8719	-0,8979
Δ	3259,270	3629,730	53,42016573		4878,296917	0,0000	
DF	437243,380	368543,760	1,735459547	0,86645055	2603,13758	-2,1190	-1,7355
PV	438543,030	370799,250	0,576216255	0,49926289	2603,13758	1,2210	-0,5762
Δ	1299,650	2255,490	66,72083846		2603,13758	0,0000	
DF	437243,380	368543,760	-10,6717064	0,99563832	3020,750542	-2,0983	10,6717
R_0	436961,553	371551,335	-0,09370573	-0,09329701	3020,750542	-0,1966	0,0937
Δ	-281,827	3007,575	105,9481227		3020,750542	0,0000	
DF	437243,380	368543,760	-1,91112494	0,88603448	2062,532591	-2,7348	1,9111
P_0	436287,150	370371,235	-0,52325202	-0,46361934	2062,532591	-1,4310	0,5233
Δ	-956,230	1827,475	130,6898941		2062,532591	0,0000	
DF	437243,380	368543,760	-0,4402136	0,40290239	4051,328652	-0,6331	0,4402
DL	433535,430	370176,050	-2,27162453	-0,91524295	4051,328652	-1,4382	2,2716
Δ	-3707,950	1632,290	173,6002814		4051,328652	0,0000	

P_0	436287,150	370371,235	0,189733053	0,18640751	2296,125305	-0,5168	-0,1897
PV	438543,030	370799,250	5,270562948	0,98247251	2296,125305	2,7240	-5,2706
Δ	2255,880	428,015	11,93689372		2296,125305	0,0000	
P_0	436287,150	370371,235	1,749843936	0,86822408	1359,211321	-4,0665	-1,7498
R_0	436961,553	371551,335	0,571479536	0,49617229	1359,211321	2,3239	-0,5715
Δ	674,403	1180,100	66,94768611		1359,211321	0,0000	
P_0	436287,150	370371,235	0,070931999	-0,07075423	2758,633746	0,1633	-0,0709
DL	433535,430	370176,050	14,09800958	-0,99749378	2758,633746	-2,3020	-14,0980
Δ	-2751,720	-195,185	204,5081208		2758,633746	0,0000	
P_0	436287,150	370371,235	-1,91112494	-0,88603448	2062,532591	2,7348	1,9111
DF	437243,380	368543,760	-0,52325203	0,46361934	2062,532591	1,4310	0,5233
Δ	956,230	-1827,475	330,6898941		2062,532591	0,0000	
R_0	436961,553	371551,335	-10,6717064	-0,99563832	3020,750542	2,0983	10,6717
DF	437243,380	368543,760	-0,09370573	0,09329701	3020,750542	0,1966	0,0937
Δ	281,827	-3007,575	305,9481227		3020,750542	0,0000	
R_0	436961,553	371551,335	-1,62337654	-0,85142435	2972,953491	1,8232	1,6234
Chicer	438520,800	369020,090	-0,61600003	0,52447743	2972,953491	1,1231	0,6160

a							
Δ	1559,247	-2531,245	335,1478562		2972,953491	0,0000	
R_0	436961,553	371551,335	-0,47555861	-0,42946837	1751,199974	1,5613	0,4756
PV	438543,030	370799,250	-2,10279024	0,90308190	1751,199974	3,2830	2,1028
Δ	1581,477	-752,085	371,7401929		1751,199974	0,0000	
R_0	436961,553	371551,335	-13,5115641	0,99727241	2260,61102	-2,8085	13,5116
PE	436794,700	373805,780	-0,07401068	-0,07380881	2260,61102	-0,2079	0,0740
Δ	-166,853	2254,445	104,7030913		2260,61102	0,0000	
R_0	436961,553	371551,335	0,40141145	-0,37251959	3691,846102	0,6424	-0,4014
DL	433535,430	370176,050	2,491209458	-0,92802433	3691,846102	-1,6003	-2,4912
Δ	-3426,123	-1375,285	224,3012124		3691,846102	0,0000	
R_0	436961,553	371551,335	1,749843936	-0,86822408	1359,211321	4,0665	-1,7498
P_0	436287,150	370371,235	0,571479536	-0,49617229	1359,211321	-2,3239	-0,5715
Δ	-674,403	-1180,100	266,9476861		1359,211321	0,0000	

Tabelul 5.25

P		Nr. vizei	Dir. masurate.	Orient. Calc.	$Z_i = \theta^{o} - r_i$	$Z = [\theta^{o} - r_i]/n$	$\theta^{m} = Z + r_i$	$l_i = -(\theta^{m} - \theta^{o})$
P.S	P.V		r_i	(θ^{o})	[g.c.cc]	[g.c.cc]	[g.c.cc]	[cc]
PV	PE	1	130,5304	133,5316	3,0012		133,5312	3,923
	R_0	2	168,7392	171,7402	3,0010	3,0008	171,7400	1,538
	P_0	3	208,9364	211,9369	3,0005		211,9372	-3,454
	DF	4	263,7202	266,7208	3,0006		266,7210	-2,007
	[ ]				12,0034			0,000
PE	DL	5	248,4205	253,4202	4,9997		253,4203	-1,547
	R_0	6	285,6592	290,6598	5,0006	4,9998	290,6590	7,436
	PV	7	328,5324	333,5316	4,9992		333,5322	-5,890
	[ ]				14,9995			0,000
DL	DF	8	361,601	373,6003	11,9993		373,5998	4,363
	P_0	9	392,5095	4,5081	11,9986	11,9988	4,5083	-2,243
	R_0	10	12,3026	24,3012	11,9986		24,3014	-2,327
	PE	11	41,4213	53,4202	11,9989		53,4201	0,207

	[ ]				47,9954			0,000
DF	PV	12	51,7201	66,7208	15,0007		66,7204	4,793
	R_0	13	90,9476	105,9481	15,0005		105,9479	2,636
	P_0	14	115,6895	130,6899	15,0004	15,0003	130,6898	1,349
	DL	15	158,6009	173,6003	14,9994		173,6012	-8,778
	[ ]				60,0010			0,000
P_0	PV	16	21,2342	11,9369	390,7027		11,9368	1,200
	R_0	17	76,2453	66,9477	390,7024	390,7026	66,9479	-1,876
	DL	18	213,8054	204,5081	390,7027		204,5080	1,471
	DF	19	339,9874	330,6899	390,7025		330,6900	-0,796
	[ ]				1562,8103			0,000
R_0	DF	20	25,4236	305,9481	280,5245		305,9481	-0,042
	Chic era	21	54,6236	335,1479	280,5243	280,5245	335,1481	-2,707
	PV	22	91,216	371,7402	280,5242		371,7405	-3,340
	PE	23	224,1789	104,7031	280,5242		104,7034	-3,356
	DL	24	343,7761	224,3012	280,5251		224,3006	5,854

P_0	25	386,4228	266,9477	280,5249		266,9473	3,592
[ ]				1683,1472			0,000

Tabelul 5.26

P		Nr. vizei	P_0		R_0		l_i
P.S	P.V		a_i	b_i	c_i	d_i	
PV	PE	1					3,9232
	R_0	2			-1,5613	-3,2830	1,5379
	P_0	3	0,5168	-2,7240			-3,4542
	DF	4					-2,0068
	$\frac{i[\ ]}{\sqrt{4}}$		0,2584 i	-1,3620 i	-0,7806 i	-1,6415 i	0,0000 i
PE	DL	5					-1,5469
	R_0	6			1,8140	-0,2681	7,4365
	PV	7					-5,8896

	$\frac{i[\ ]}{\sqrt{3}}$				1,0473 i	-0,1548 i	0,0000 i
DL	DF	8					4,3629
	P_0	9	-0,1633	2,3020			-2,2429
	R_0	10			-0,6424	1,6003	-2,3268
	PE	11					0,2067
	$\frac{i[\ ]}{\sqrt{4}}$		-0,0816 i	1,1510 i	-0,3212 i	0,8001 i	0,0000 i
DF	PV	12					4,7931
	R_0	13			-2,0983	-0,1966	2,6356
	P_0	14	-2,7348	-1,4310			1,3495
	DL	15					-8,7781
	$\frac{i[\ ]}{\sqrt{4}}$		-1,3674 i	-0,7155 i	-1,0491 i	-0,0983 i	0,0000 i
P_0	PV	16	-0,5168	2,7240			1,2004
	R_0	17	-4,0665	2,3239	4,0665	-2,3239	-1,8757
	DL	18	0,1633	-2,3020			1,4710

	DF	19	2,7348	1,4310			-0,7957
	$\frac{i[\ ]}{\sqrt{4}}$		-0,8426 i	2,0885 i	2,0333 i	-1,1620 i	0,0000 i
R_0	DF	20			2,0983	0,1966	-0,0424
	Chicera	21			1,8232	1,1231	-2,7071
	PV	22			1,5613	3,2830	-3,3402
	PE	23			-2,8085	-0,2079	-3,3562
	DL	24			0,6424	-1,6003	5,8543
	P_0	25	4,0665	-2,3239	-4,0665	2,3239	3,5915
	$\frac{i[\ ]}{\sqrt{6}}$		1,6602 i	-0,9487 i	-0,3061 i	2,0896 i	0,0000 i

Tabelul 5.27

Nr.crt.	Nr.viza	ai	bi	ci	di	l i	Si
1	1					3,9232	3,9232
2	2			-1,5613	-3,2830	1,5379	-3,3064
3	3	0,5168	-2,7240			-3,4542	-5,6614

4	4					-2,0068	-2,0068
5	i[ ]	0,2584 i	-1,3620 i	-0,7806 i	-1,6415 i	0,0000 i	-3,5257 i
6	5					-1,5469	-1,5469
7	6			1,8140	-0,2681	7,4365	8,9824
8	7					-5,8896	-5,8896
9	i[ ]			1,0473 i	-0,1548 i	0,0000 i	0,8925 i
10	8					4,3629	4,3629
11	9	-0,1633	2,3020			-2,2429	-0,1042
12	10			-0,6424	1,6003	-2,3268	-1,3689
13	11					0,2067	0,2067
14	i[ ]	-0,0816 i	1,1510 i	-0,3212 i	0,8001 i	0,0000 i	1,5483 i
15	12					4,7931	4,7931
16	13			-2,0983	-0,1966	2,6356	0,3406
17	14	-2,7348	-1,4310			1,3495	-2,8164
18	15					-8,7781	-8,7781
19	i[ ]	-1,3674 i	-0,7155 i	-1,0491 i	-0,0983 i	0,0000 i	-3,2304 i
20	16	0,5168	-2,7240			1,2004	-1,0067
21	17	-4,0665	2,3239	4,0665	-2,3239	-1,8757	-1,8757

22	18	-0,1633	2,3020			1,4710	3,6097
23	19	-2,7348	-1,4310			-0,7957	-4,9616
24	i[ ]	-0,8426 i	2,0885 i	2,0333 i	-1,1620 i	0,0000 i	2,1172 i
25	20			-2,0983	-0,1966	-0,0424	-2,3373
26	21			1,8232	1,1231	-2,7071	0,2392
27	22			-1,5613	-3,2830	-3,3402	-8,1845
28	23			1,8140	-0,2681	-3,3562	-1,8103
29	24			-0,6424	1,6003	5,8543	6,8122
30	25	-4,0665	2,3239	4,0665	-2,3239	3,5915	3,5915
31	i[ ]	-1,6602 i	0,9487 i	3,0142 i	0,1921 i	0,0000 i	2,4949 i
[a		43,2102	-11,8387	-27,6153	18,5958	-9,5306	12,8213
[b			31,3815	10,3505	-11,7840	7,5576	25,6669
[c				41,3550	-7,9872	4,5501	20,6530
[d					34,2064	2,9305	35,9615
[l						349,0938	354,6013

Tabelul 5.28

	a]	b]	c]	d]	l]	S]	Q11	Q22	Q33	Q44
	43,2102	-11,8387	-27,6153	18,5958	-9,5306	12,8213	-1	0	0	0
	-1	0,2740	0,6391	-0,4304	0,2206	-0,2967	0,0231	0,0000	0	0
dx	0,401	31,3815	10,3505	-11,7840	7,5576	25,6669	0	-1	0	0
		-3,2436	-7,5660	5,0949	-2,6112	3,5128	-0,2740	0	0	0
		28,1380	2,7844	-6,6891	4,9464	29,1797	-0,2740	-1	0	0
		-1	-0,0990	0,2377	-0,1758	-1,0370	0,0097	0,0355	0	0
	dy_1=	-0,278	41,3550	-7,9872	4,5501	20,6530	0,0000	0	-1	0
			-17,6487	11,8844	-6,0910	8,1940	-0,6391	0	0	0
			-0,2755	0,6619	-0,4895	-2,8875	0,0271	0,0990	0	0
			23,4308	4,5591	-2,0304	25,9595	-0,6120	0,0990	-1	0
			-1	-0,1946	0,0867	-1,1079	0,0261	-0,0042	0,0427	0
		dx_2=	0,157	34,2064	2,9305	35,9615	0,0000	0	0	-1
				-8,0028	4,1016	-5,5177	0,4304	0	0	0
				-1,5902	1,1759	6,9367	-0,0651	-0,24	0	0
				-0,8871	0,3951	-5,0511	0,1191	-0,02	0,1946	0

	23,7263	8,6031	32,3294	0,4843	-0,26	0,1946	-1
	-1	-0,3626	-1,3626	-0,0204	0,0108	-0,0082	0,0421
dy_2=	**-0,363**	349,093 8	354,6013	**0,0517**	**0,0387**	**0,0443**	**0,0421**
		-2,1021	2,8279	**0,2273**	**0,1968**	**0,2104**	**0,2063**
		-0,8695	-5,1295				
		-0,1759	2,2495				
		-3,1194	-11,7225				
[vv] =		**342,827**	**342,827**				

$m_0 = \pm \sqrt{\frac{342.8}{25-10}}$ =4,781

$m = \pm$ 1,087cm 0,941 1,006 0,981

Se vor calcula în continuare coordonatele definitive ale punctelor încadrate:

Tabelul 5.29

	Coordonate provizorii		Coordonate definitive	
P_0	X=	436287.150	0.004	436287.154
	Y=	370371.235	-0.003	370371.232
R_0	X=	436961.553	0.002	436961.555
	Y=	371551.335	-0.004	371551.331

Tabelul 5.30

	Coordonate definitive		Orient.def.
Pct.	X	Y	(θ)
	[m]	[m]	g.c.cc.
1	2	3	4
P_0	436287,154	370371,232	66,947765
R_0	436961,555	371551,331	66,9477
Δ	674,401	1180,099	

a	Δx_1	c	Δx_2		Orient.def.
b	Δy_1	d	Δy_2	$\Delta\theta = a\Delta x_2 + b\Delta y_2 + c\Delta x_1 + d\Delta y_1$	$(\theta) = \theta^c + \Delta\theta$
[cc / cm]	[cm]	[cc / cm]	[cm]	[cc]	[cc]
5	6	7	8	9	10
-4.0665	0.4010	4.0665	0.157		
2.3239	-0.2775	-2.3239	-0.363	0.794	66.947765

Tabelul 5.31.

Metoda	Punctul P_0			
	X	m_X (cm)	Y	m_Y (cm)
Intersecția multiplă înainte	436287,164	2.199	370371,243	1.898
Intersecția multiplă combinată	436287,154	1,087	370371,232	0,941

Metoda	Punctul R_0			
	X	$m_{X\ (cm)}$	Y	$m_{Y\ (cm)}$
	-	-	-	-
Intersecția multiplă înapoi	436961,543	1.19	371551,346	1.31
Intersecția multiplă combinată	436961,555	1,006	371551,331	0,981

6.REZOLVAREA REȚELELOR DE TRIANGULAȚIE PRIN METODA MĂSURĂTORILOR CONDIȚIONATE

6.1.Considerații generale

Metodologia de prelucrare a măsurătorilor geodezice prin metoda măsurătorilor condiționate de aceeași precizie și de precizii diferite a fost tratată în §4.3.4 și §4.3.5., iar în cele ce urmează vor fi prezentate câteva aspecte privind stabilirea condițiile geometrice și a ecuațiilor de corecții aferente acestora.

Este cunoscut faptul că în orice rețea geodezică, numărul mărimilor măsurate este mai mare decât numărul strict necesar pentru obținerea mărimilor ce trebuie determinate.

Numărul măsurătorilor suplimentare, efectuate într-o rețea geodezică, determină numărul ecuațiilor de condiție

Numărul condițiilor geometrice "r" se stabilește în funcție de natura rețelei (fără constrângeri, cu constrângeri) și ***este dat de diferența dintre numărul observațiilor efectuate"n_e" și numărul observațiilor strict necesar"n_{sn}":***

$$r = n_e - n_{sn} \tag{6.1.}$$

Volumul de calcul necesar compensării unei rețele geodezice este diferit în funcție de metoda de prelucrare aleasă, de configurația geometrică a rețelei și de numărul ecuațiilor normale.

In cazul rețelelor de triangulație cu multe legături la ordinul superior, în interiorul cărora se dezvoltă o rețea de

îndesire, metoda cea mai indicată de rezolvare este cea a măsurătorilor indirecte.

Rețelele de triangulație sub forma unor lanțuri de triunghiuri sau patrulatere, cu puține legături la ordinul superior, se rezolvă prin metoda măsurătorilor condiționate.

Atunci când, la rezolvarea rețelei de triangulație se aplică metoda măsurătorilor condiționate, trebuie avut grijă la stabilirea numărului necesar și suficient de ecuații de condiție și la scrierea corectă a acestora.

In cazul utilizării metodei măsurătorilor condiționate la rezolvarea rețelelor geodezice pot apărea următoarele neajunsuri :

- omiterea unor ecuații de condiție;
- scrierea unor ecuații de condiție ce constituie consecința altor ecuații.

In cazul omiterii unor ecuații , rezultatele finale ale compensării vor fi inexacte, deoarece nu vor verifica condițiile omise, rezultând o rețea incompletă geometric.

Atunci când, ecuațiile scrise sunt consecințe ale altor ecuații (suma, diferența lor etc.), va rezulta o nedeterminare pentru corelata "k" respectivă.

In scopul prelucrării măsurătorilor efectuate într-o rețea de triangulație geodezică este important, în prima etapă, să se stabilească numărul condițiilor geometrice, să se cunoască forma condițiilor geometrice și corespunzător acestora să se scrie ecuațiile de corecții .

6.2. Stabilirea numărului condițiilor geometrice în rețele fără constrângeri (independente)

Condițiile geometrice pe care trebuie să le îndeplinească observațiile geodezice într-o asemenea rețea de triangulație se numesc condiții interioare.

Intr-o rețea de triangulație independentă se formează următoarele condiții :

- ***condiția de figură*** - Suma unghiurilor interioare ale triunghiurilor plane trebuie să fie egală cu 200^g.
- ***condiția de tur de orizont (de stație)***- Suma unghiurilor situate în jurul unui punct și care formează un tur de orizont complet trebuie să fie egală cu 400^g.
- ***condiția de pol sau de laturi*** - . Rezolvarea succesivă a triunghiurilor care au vârf comun, cu începere de la o latură și finalizare pe aceeași latură, trebuie să conducă către aceeași valoare.

Intrucât, construcția unei rețele este posibilă atunci când se cunoaște lungimea unei laturi cu ajutorul căreia se determină scara rețelei și două unghiuri, pentru fiecare punct determinat, conform (6.1) se poate scrie că numărul total de ecuații interioare "r"se calculează cu relația:

$$r = \omega - 2(p-2) = \omega - 2p + 4 \qquad (6.3)$$

unde :

ω – numărul unghiurilor măsurate ;

2(p-2)-numărul strict necesar de unghiuri măsurate pentru determinarea unui număr de (p-2) puncte din rețea;

p – numărul total de puncte ;

r – numărul total al condițiilor geometrice .

Observație: din numărul total de puncte se scade 2 pentru că primele două puncte delimitează latura inițială.

Numărul ecuațiilor de figură se stabilește cu relația:

$$w_1 = l_1 - p_1 + 1 \qquad (6.4)$$

în care:

l_1 – numărul laturilor cu viză dublă ;

p_1 – numărul punctelor staționabile ;

w_1 – numărul condițiilor de figură .

Numărul ecuațiilor de punct central (w_2):

w_2 – numărul punctelor în care unghiurile sunt măsurate într-un tur de orizont complet.

Numărul ecuațiilor de pol sau de laturi:

$$s = l - \{1 + 2(p-2)\} = l - 2p + 3 \qquad (6.5)$$

Pornind de la latura cunoscută pentru fiecare din cele (p-2) puncte determinate sunt necesare câte două laturi. Astfel paranteza mare din relația (6.5.) reprezintă numărul strict necesar de laturi, iar "*l*" numărul total de laturi.

6.3.Stabilirea numărului condițiilor geometrice în rețele dependente sau subordonate

Intr-o rețea de triangulație dependentă deschisă (cu constrângeri) se formează condițiile de:

- figură ;
- tur de orizont ;
- laturi ;

- orientări ;
- unghi fix ;
- baze ;
- coordonate.

Se observă că în rețelele subordonate apar în plus față de rețelele independente condiții de orientări, de unghi fix, de baze și de coordonate.

Deci pentru a stabili numărul primelor trei condiții se folosesc formulele scrise pentru rețelele neconstrânse.

Numărul condițiilor de orientări "n_θ"se determină cu relația:

$$n_\theta = N_\theta - 1 \qquad (6.6)$$

unde:

N_θ - numărul orientărilor fixe (cunoscute)

Numărul condițiilor de unghi fix "n_u":

$$n_u = N_u \qquad (6.7)$$

unde:

N_u - numărul unghiurilor fixe

Numărul ecuațiilor de baze "n_b":

$$n_b = N_b - 1 \qquad (6.8)$$

unde:

N_b - numărul bazelor măsurate

Numărul condițiilor de coordonate "n_c":

$$n_c = 2(R-1) \tag{6.9}$$

unde:

R - numărul grupelor separate de puncte fixe

6.4.Forma condițiilor geometrice și a ecuațiilor de erori

In cele ce urmează, se vor examina formele concrete ale condițiilor geometrice și ale ecuațiilor de erori în funcție de elementele măsurate:

Condiția de figură

Suma unghiurilor interioare ale triunghiurilor trebuie să fie egală cu 200^g.

De exemplu pentru triunghiul BCF (fig.6.1.) se cere să fie satisfăcută egalitatea :

$$(\hat{1})+(\hat{2})+(\hat{3})=200^g \tag{6.10}$$

Notând valoarea cea mai probabilă a unghiurilor în funcție de unghiurile măsurate și corecțiile aferente se poate scrie:

$$\begin{aligned}(\hat{1}) &= \hat{1} + v_1\\ (\hat{2}) &= \hat{2} + v_2\\ (\hat{3}) &= \hat{3} + v_3\end{aligned} \tag{6.11}$$

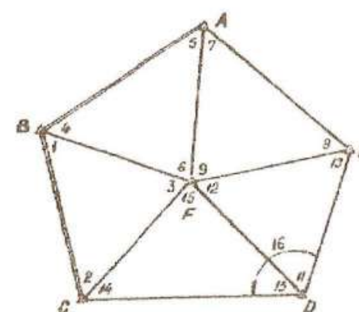


Fig.6.1.Rețea de triangulație

Inlocuind pe (6.11) în (6.10) se obține ecuația de condiție de figură:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \underbrace{\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} - 200^g}_{w_1} = 0 \tag{6.12}$$

Termenul liber al acesteia "w_1" reprezintă eroarea de neînchidere unghiulară în triunghiul considerat.

Condiția de tur de orizon "t"

Suma unghiurilor situate în jurul unui punct și care formează un tur de orizont complet trebuie să fie egală cu 400^g.

De exemplu pentru punctul "F" se cere să fie satisfăcută egalitatea :

$$(\hat{3})+(\hat{6})+(\hat{9})+(\widehat{12})+(\widehat{15})=400^g \tag{6.13}$$

sau:

$$\hat{3}+v_3+\hat{6}+v_6+\hat{9}+v_9+\hat{12}+v_{12}+\hat{15}+v_{15}=400^g \quad (6.14)$$

Deoarece, de obicei în punctul "F" se măsoară direcțiile, atunci :

$$\hat{3}+\hat{6}+\hat{9}+\hat{12}+\hat{15}=400^g \quad (6.15)$$

și în consecință, termenul liber din ecuația de condiție pentru turul de orizont este egal cu zero, iar ecuația de condiție are forma :

$$v_3+v_6+v_9+v_{12}+v_{15}=0 \quad (6.16)$$

Condiția de pol sau acordul laturilor

Rezolvarea succesivă a triunghiurilor care au vârf comun, cu începere de la o latură și finalizare pe aceeași latură trebuie să conducă către aceeași valoare.

De exemplu, pornind cu calculul de la latura BF , prin aplicarea teoremei sinusurilor în mod succesiv se obține :

$$BF=\frac{\sin(5)}{\sin(4)}AF;\ AF=\frac{\sin(8)}{\sin(7)}EF;\ EF=\frac{\sin(11)}{s\sin(10)}DF;$$
$$DF=\frac{\sin(14)}{\sin(13)}CF;\ CF=\frac{\sin(1)}{\sin(2)}BF \quad (6.17)$$

Inlocuind relațiile (6.17), una în cealaltă și împărțind cu BF se obține relația de pol:

$$\frac{\sin(\hat{5})\sin(\hat{8})\sin(\hat{10})\sin(\hat{14})\sin(\hat{1})}{\sin(\hat{4})\sin(\hat{7})\sin(\hat{10})\sin(\hat{13})\sin(\hat{2})}=1 \quad (6.18)$$

Punctul "F" din care pornesc laturile către vârfurile poligonului ABCDE se numește pol.Polul poate fi ales atât în interiorul conturului poligonal cât și în exteriorul lui.

Condiția de pol se poate scrie foarte ușor, pornind de la relația geometrică evidentă:

$$\frac{BF}{AF}\frac{AF}{EF}\frac{EF}{DF}\frac{DF}{CF}\frac{CF}{BF}=1 \quad (6.19)$$

în care se înlocuiesc laturile cu sinusurile unghiurilor opuse, se ajunge astfel la relația (6.18).

Relația (6.18) se mai poate scrie sub forma:

$$\sin(\hat{5}+v_5)\sin(\hat{8}+v_8)\sin(\hat{11}+v_{11})\sin(\hat{14}+v_{14})\sin(\hat{1}+v_1)-$$
$$-\sin(\hat{4}+v_4)\sin(\hat{7}+v_7)\sin(\hat{10}+v_{10})\sin(\hat{13}+v_{13})\sin(\hat{2}+v_2)=0 \quad (6.20)$$

Pentru liniarizarea relației (6.20) se va dezvolta fiecare termen în serie Taylor și se vor efectua produsele lor, astfel se obține:

$$P_1+\frac{P_1}{\rho}(ctg\hat{5}v_5+ctg\hat{8}v_8+ctg\,\hat{11}v_{11}+ctg\,\hat{14}v_{14}+ctg\,\hat{1}v_1)-$$
$$-P_2-\frac{P_2}{\rho}(ctg\hat{4}v_4+ctg\,\hat{7}v_7+ctg\,\hat{10}v_{10}+ctg\,\hat{13}v_{13}+ctg\,\hat{2}v_2)=0 \quad (6.21)$$

în care:

$$P_1 = \sin\hat{5}\sin\hat{8}\sin\hat{11}\sin\hat{14}\sin\hat{1}$$
$$P_2 = \sin\hat{4}\sin\hat{7}\sin\hat{10}\sin\hat{13}\sin\hat{2} \qquad (6.22)$$

Efectuând notațiile:

$$ctg(i) = d_i; \quad i = \hat{1}, \hat{2}, \ldots \hat{14}$$
$$w = \rho^{cc}\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right) \qquad (6.23)$$

relația (6.21) devine:

$$-d_4 v_4 + d_5 v_5 - d_7 v_7 + d_8 v_8 - d_{10} v_{10} + d_{11} v_{11} - \\ - d_{13} v_{13} + d_{14} v_{14} - d_2 v_2 + d_1 v_1 + w = 0 \qquad (6.24)$$

In cazul, când liniarizarea se face prin logaritmare termenul liber se va calcula cu relația:

$$\frac{\rho}{M}(P_1 - P_2) = w_3; \quad M = \lg e = 0,434294 \qquad (6.25)$$

în care :

$$P_1 = \lg\sin\hat{5}\sin\hat{8}\sin\hat{11}\sin\hat{14}\sin\hat{1}$$
$$P_2 = \lg\sin\hat{4}\sin\hat{7}\sin\hat{10}\sin\hat{13}\sin\hat{2} \qquad (6.26)$$

" P_1 " și " P_2 " se calculează folosind unghiurile măsurate.

Condiția de stație

Unul și același unghi măsurat cu stații diferite sau unghiul măsurat direct față de suma altor unghiuri măsurate direct, dar încadrate în acesta, trebuie să aibă aceleași valori.

De exemplu, în punctul "D" în care au fost măsurate direct unghiurile 11, 13, 16 trebuie să satisfacă egalitatea :

$$(\hat{11}) + (\hat{13}) = (\hat{16}) \qquad (6.27)$$

Condiția de stație se satisface de obicei înainte de compensare.

De observat că în cele patru condiții arătate mai sus intră valorile unghiurilor măsurate fără participarea datelor inițiale. In acest fel pe baza acestor condiții se poate trage concluzia asupra calitații măsurătorilor.

Luând în considerare și datele inițiale, acestea împreună cu unghiurile măsurate trebuie să satisfacă, în plus, într-o rețea de triangulație condițiile următoare :

Condiția de orientări

Dacă într-o rețea există două sau mai multe laturi ale căror orientări se cunosc, deci sunt definitive, atunci valorile acestor orientări obținute cu ajutorul unghiurilor din rețea trebuie să fie egale cu valorile definitive.Un caz particular al condiției orientărilor constă în aceea că suma sau diferența unor unghiuri măsurate trebuie să fie egală cu diferența orientărilor date. Acest caz particular mai poartă numele și de condiția de unghi fix.

Dacă de exemplu sunt cunoscute orientările " θ_{BA} " și " θ_{BC} ", atunci trebuie să existe satisfăcută egalitatea :

$$(\hat{1})+(\hat{4})=\theta_{BC}-\theta_{BA} \tag{6.28}$$

sau:

$$v_1+v_4+\underbrace{\hat{1}+\hat{4}-(\theta_{BC}-\theta_{BA})}_{W}=0 \tag{6.29}$$

Condiţia de baze

Dacă în reţea avem două sau mai multe laturi iniţiale (baze), atunci valoarea calculată a uneia din ele cu utilizarea unghiurilor măsurate trebuie să fie egală cu valoarea dată.

De exemplu latura AB calculată pornind de la latura BC, trebuie să fie egală cu cea dată adică :

$$AB=\frac{\sin(\hat{6})}{\sin(\hat{5})}BF \;;\; BF=\frac{\sin(\hat{2})}{\sin(\hat{3})}BC \tag{6.30}$$

de unde :

$$\frac{BC}{AB}\frac{\sin(\hat{2})\sin(\hat{6})}{\sin(\hat{3})\sin(\hat{5})}=1 \tag{6.31}$$

Pentru a scrie ecuaţia de baze, înlocuim unghiurile cele mai probabile cu unghiurile măsurate şi corecţiile acestora :

$$\frac{BC\sin(\hat{2}+v_2)\sin(\hat{6}+v_6)}{AB\sin(\hat{3}+v_3)\sin(\hat{5}+v_5)}=1 \tag{6.32}$$

Logaritmând relaţia (6.32) obţinem:

$$\begin{aligned}&\log BC+\log\sin(\hat{2}+v_2)+\log\sin(\hat{6}+v_6)-\\&-\{\log AB+\log\sin(\hat{3}+v_3)+\log\sin(\hat{5}+v_5)\}=0\end{aligned} \tag{6.33}$$

Se ştie că :

$$\log x=\ln e\ln x=0{,}434294\ln x=M\ln x \tag{6.34}$$

deci:

$$\begin{aligned}&M\{\ln BC+\ln\sin(\hat{2}+v_2)+\ln\sin(\hat{6}+v_6)-\\&-M\{\ln AB+\ln\sin(\hat{3}+v_3)+\ln\sin(\hat{5}+v_5)\}=0\end{aligned} \tag{6.35}$$

Dezvoltând în serie şi după grupări rezultă :

$$\begin{aligned}&ctg\hat{2}v_2-ctg\hat{3}v_3+ctg\hat{6}v_6-ctg\hat{5}v_5-\\&-\rho^{cc}\frac{v_{AB}}{AB}+\rho^{cc}\frac{v_{BC}}{BC}+\frac{\rho^{cc}}{M}(P_1-P_2)=0\end{aligned} \tag{6.36}$$

în care:

$$\begin{aligned}P_1&=\log BC\sin\hat{2}\sin\hat{6}\\P_2&=\log AB\sin\hat{3}\sin\hat{5}\end{aligned} \tag{6.37}$$

Notând:

$$\begin{aligned}&ctg\,\hat{i}=d_i;\quad \hat{i}=\hat{2},\hat{3}.\hat{5},\hat{6}\\&\frac{\rho^{cc}}{M}(P_1-P_2)=w\end{aligned} \tag{6.38}$$

ecuaţia de baze se prezintă sub forma:

$$d_2v_2 - d_3v_3 - d_5v_5 + d_6v_6 + \rho^{cc}\frac{v_{BC}}{BC} - \rho^{cc}\frac{v_{AB}}{AB} + w = 0 \quad (6.39)$$

In cazul în care, laturile AB şi BC se consideră fară erori, atunci erorile relative $\frac{v_{AB}}{AB}$ şi $\frac{v_{BC}}{BC}$ sunt nule şi în ecuaţia de mai sus termenii $\frac{v_{AB}}{AB}$, $\frac{v_{BC}}{BC}$ nu există.

Condiţia de coordonate

Dacă în reţea avem date iniţial puncte sau grupe de puncte situate separat unul de altul, adică neavând între ele o legătură definitivă, de exemplu punctele A, B, C şi D, E, F (fig.6.2) atunci parcurgând cu calculele de la unul din punctele A, B sau C spre unul din punctele D, E sau F, trebuie obţinute coordonatele definitive ale acestui punct.

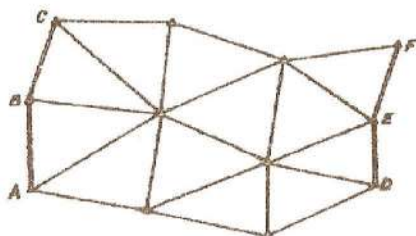


Fig.6.2.Reţea de triangulaţie cu constrângeri

Condiţiile coordonatelor se creează şi în cazul unei reţele discontinue de triunghiuri : exemplu un lanţ închis de triunghiuri (fig.6.3):

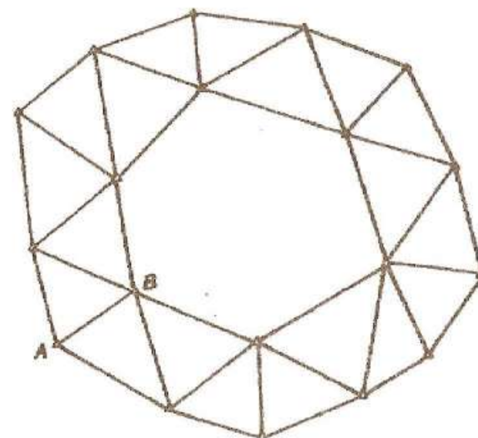


Fig.6.3.Lanţ de triunghiuri închis

Pentru a arăta modul de scriere al ecuaţiilor de orientări şi de coordonate considerăm o reţea de triangulaţie de forma unui lanţ de patrulatere (fig.6.4):

In reţea sunt date coordonatele punctelor A, B, C, D şi sunt măsurate unghiurile 1, 2,..., 24.

Se constată că în reţea se pot forma ecuaţii de condiţie de figură, de laturi, de baze, de orientări şi de coordonate.

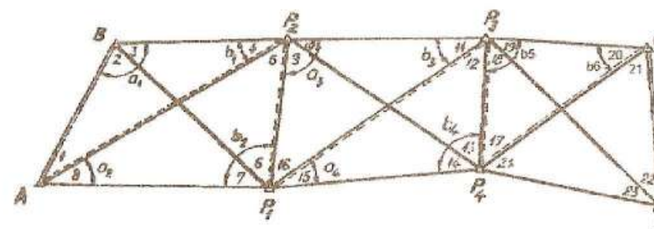


Fig.6.4.Lanţ de patrulatere

Ecuaţia de condiţie de orientări

Formarea acestei ecuaţii are la bază condiţia geometrică de orientări, care constă în aceea că plecând de la orientarea cunoscută a uneia din laturi şi folosind unghiurile măsurate, trebuie să se obţină orientarea cunoscută a celeilalte laturi. Din cauza erorilor inerente măsurătorilor acest lucru nu se întâmplă, nepotrivirea reprezentând termenul liber al ecuaţiei. Pentru aceasta se alege drumul cel mai scurt cu numărul cel mai mic de vârfuri.

Astfel pornind de la orientarea laturii AB (cunoscută din coordonate) se poate ajunge la orientarea laturii BC (cunoscută tot din coordonate) pe traseul AP_1P_4D.

Orientarea laturii DC va fi :

$$\begin{aligned}\theta_{DC} = \theta_{AB} + (\hat{1}) + (\hat{8}) + (\hat{7}) + (\hat{6}) + (\widehat{16}) + (\widehat{15}) + \\ (\widehat{13}) + (\widehat{14}) + (\widehat{17}) + (\widehat{24}) + (\widehat{22}) + (\widehat{23}) - 3\cdot 200^g\end{aligned} \quad (6.40)$$

Inlocuind în egalitatea scrisă, unghiurile compensate cu valorile lor măsurate şi corecţiile corespunzătoare şi notând :

$$\begin{aligned}\hat{1} + \hat{8} + \hat{7} + \hat{6} + \widehat{16} + \widehat{15} + \widehat{13} + \widehat{14} + \widehat{17} + \widehat{24} + \\ + \widehat{23} + \widehat{22} - 3\cdot 200 - (\theta_{DC} - \theta_{AB}) = w\end{aligned} \quad (6.41)$$

obţinem ecuaţia de condiţie de orientări a cărei formă este :

$$\begin{aligned}v_1 + v_8 + v_7 + v_6 + v_{16} + v_{15} + v_{13} + \\ v_{14} + + v_{17} + v_{24} + v_{23} + v_{22} + w_5 = 0\end{aligned} \quad (6.42)$$

Ecuaţia de condiţie de coordonate

Dacă la compensarea unei reţele de triangulaţie s-au pus toate condiţiile în afara celor de coordonate, se poate întâmpla să se ajungă la alte valori de coordonate faţă de cele cunoscute.

Pentru stabilirea ecuaţiilor de condiţie de coordonate se alege un traseu sprijinit cu unul din capete pe unul din punctele cu coordonatele cunoscute, iar calălalt capăt pe alt punct cu coordonatele deasemenea cunoscute.

In exemplul considerat plecând de la punctul "A" pentru a ajunge la punctul "C", se alege traseul punctat $AP_2P_1P_3P_4C$ care cuprinde toate punctele a căror coordonate trebuie determinate.

Ecuaţiile de condiţie de coordonate sunt în număr de două, una pe axa absciselor şi una pe axa ordonatelor.

Folosind orientările şi laturile stabilite prin intermediul unghiurilor compensate abscisa punctului "C" este dată de relaţia :

$$\begin{aligned}x_C = x_A + (s_{AP_2})\cos(\theta_{AP_2}) + (s_{P_2P_1})\cos(\theta_{P_2P_1}) + \\ + \ldots + (s_{P_4C})\cos(\theta_{P_4C})\end{aligned} \quad (6.43)$$

Intrucât :

$$(\theta_{AP_2}) = \theta_{AB} + \hat{1} + v_1 = \theta_{AP_2} + v_1$$

$$(\theta_{P_2P_1}) = \theta_{AB} + \hat{1} - \hat{5} + v_1 - v_5 - 200^g = \theta_{P_2P_1} + v_1 - v_5$$

....

$$(\theta_{P_4C}) = \theta_{P_4C} + v_1 - v_5 + v_{16} - v_{12} + v_{17}$$

$$(s_{AP_2}) = s_{AP_2} + v_{AP_2}$$

$$(s_{P_2P_1}) = s_{P_2P_1} + v_{P_2P_1}$$

.... (6.44)

$$(s_{P_4C}) = s_{P_4C} + v_{P_4C}$$

în egalitatea lui "X$_C$" putem aplica formula cunoscută a dezvoltării în serie pentru o funcție cu mai multe variabile și obținem :

$$x_C = x_A + s_{AP_2}\cos\theta_{AP_2} + ... + s_{P_4C}\cos\theta_{P_4C} + \\ +\cos\theta_{AP_2}v_{AP_2} + ... + \cos\theta_{P_4C}v_{P_4C} - \frac{1}{\rho^{cc}}[(y_C - y_A)v_1 + \\ + ... + (y_C - y_{P_4})v_{17}] \quad (6.45)$$

Abscisa punctului "C" calculată cu elementele măsurate este :

$$x_C^{'} = x_A + s_{AP_2}\cos\theta_{AP_2} + ... + s_{P_4C}\cos\theta_{P_4C} \quad 6.46)$$

Notăm :

$x_C^{'} - x_C = w_x$ – neînchiderea punctului "C" pe "x" în milimetri

Rezultă deci, egalitatea :

$$\cos\theta_{AP_2}v_{AP_2} + ... + \cos\theta_{P_4C}v_{P_4C} - \frac{1}{\rho^{cc}}[(y_C - y_A)v_1 - \\ -(y_C - y_{P_2})v_5 + ... + (y_C - y_{P_4})v_{17}] + w_x = 0 \quad (6.47)$$

Pentru calculul corecțiilor $v_{AP_2}, v_{P_2P_1}, ..., v_{P_4C}$ procedăm astfel : se calculează laturile $AP_2, P_2P_1, ..., P_4C$,aplicând teorema sinusului :

$$AP_2 = \frac{\sin a_1}{\sin b_1}AB$$

$$P_2P_1 = \frac{\sin a_1 \sin a_2}{\sin b_1 \sin b_2}AB$$

....

$$P_4C = \frac{\sin a_1 ... \sin a_5}{\sin b_1 ... \sin b_5}AB \quad (6.48)$$

S-a notat :

$a_1, ..., a_5$ – unghiurile opuse laturilor ce urmează a se determina din triunghiuri

$b_1, ..., b_5$ – unghiurile opuse laturilor de plecare.

Pe de altă parte putem scrie :

$$\frac{m\log x}{mx} = \Delta \quad (6.49)$$

sau :

$$\frac{d\log x}{dx} = \Delta = \frac{dM\ln x}{dx} = \frac{M\frac{dx}{x}}{dx} \quad (6.50)$$

deci :

$$\frac{M}{x} = \frac{m_{\log x}}{m_x} \quad (6.51)$$

$$m_x = \frac{x}{M} m_{\log x} \qquad (6.52)$$

sau :

$$\Delta x = \frac{x}{M} \Delta \log x \qquad (6.53)$$

$M \cong 0,4343$ modulul logaritmilor naturali

Pentru cazul nostru avem :

$$AP_2 = \frac{AP_2}{M} \Delta(\log \sin a_1 + \log AB - \log \sin b_1) \qquad (6.54)$$

sau :

$$AP_2 = \frac{AP_2}{M}\left(\frac{d \log \sin a_1}{da_1} \Delta a_1 - \frac{d \log \sin b_1}{db_1} \Delta b_1\right) \qquad (6.55)$$

Considerând creşterile cu însăşi corecţiile se poate scrie :

$$v_{AP_2} = \frac{AP_2}{M}\left(\frac{d \log \sin a_1}{da_1} v_{a_1} - \frac{d \log \sin b_1}{db_1} v_{b_1}\right) \qquad (6.56)$$

Analog se stabileşte :

$$v_{P_2P_1} = \frac{P_2P_1}{M}\left(\frac{d \log \sin a_1}{da_1} v_{a_1} + \frac{d \log \sin a_2}{da_2} v_{a_2} - \frac{d \log \sin b_1}{db_1} v_{b_1} - \frac{d \log \sin b_2}{db_2} v_{b_2}\right) \qquad (6.57)$$

ş.a.m.d.

Revenind la unghiurile măsurate se pot utiliza notaţiile :

$$\frac{d \log \sin a_1}{da_1} = \frac{d \log \sin(\hat{2}+\hat{3})}{d(\hat{2}+\hat{3})} = d_{2-3}$$

....

$$\frac{d \log \sin a_5}{da_5} = \frac{d \log \sin(\hat{18}+\hat{19})}{d(\hat{18}+\hat{19})} = d_{18-19} \qquad (6.58)$$

$$v_{a_1} = v_{(2+3)} = v_2 + v_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6.59)$$

$$v_{a_5} = v_{(18+19)} = v_{18} + v_{19}$$

Aceleaşi relaţii se determină şi pentru termenii în "b". Cu aceste notaţii se poate scrie :

$$\cos\theta_{AP_2} v_{AP_2} + \ldots + \cos\theta_{P_4C} v_{P_4C} = \frac{AP_2 \cos\theta_{AP_2}}{M}[d_{2-3}(v_2+v_3) - d_4 v_4] + \frac{P_2P_1 \cos\theta_{P_2P_1}}{M}[d_{2-3}(v_2+v_3) + d_8 v_8 - d_4 v_4 - d_{6-7}(v_6+v_7)] + \ldots + \frac{P_4C \cos\theta_{P_4C}}{M}[d_{2-3}(v_2+v_3) + d_8 v_8 + \ldots + d_{18-19}(v_{18}+v_{19}) - d_4 v_4 - d_{6-7}(v_6+v_7) - \ldots - d_{20} v_{20}] \qquad (6.60)$$

Ecuaţia de condiţie pe axa absciselor ia forma :

$$(x_C - x_A)d_{2-3}(v_2 + v_3) + (x_C - x_{P_2})d_8 v_8 + \ldots$$
$$+(x_C - x_{P_4})d_{18-19}(v_{18} + v_{19}) - (x_C - x_A)d_4 v_4 -$$
$$-(x_C - x_{P_2})d_{6-7}(v_6 + v_7) - \ldots - (x_C - x_{P_4})d_{20}v_{20} -$$
$$-\frac{M10^6}{\rho^{cc}}[(y_C - y_A)v_1 - (y_C - y_{P_2})v_5 + \ldots + \tag{6.61}$$
$$+(y_C - y_{P_4})v_{17}] + Mw_x = 0$$

Analog ecuaţia de condiţie pe axa ordonatelor se scrie :

$$(y_C - y_A)d_{2-3}(v_2 + v_3) + \ldots + (y_C - y_{P_4})d_{18-19}(v_{18} + v_{19}) -$$
$$-(y_C - y_A)d_4 v_4 - \ldots - (y_C - y_{P_4})d_{20}v_{20} - \frac{M10^6}{\rho^{cc}}[(x_C - x_A)v_1 - \tag{6.62}$$
$$-(x_C - x_{P_2})v_5 + \ldots + (x_C - x_{P_4})v_{17}] + Mw_y = 0$$

In ambele ecuaţii de corecţii, termenii se ordonează după corecţiile "v".

Ecuaţia funcţiei de greutate

Pentru a cunoaşte precizia cu care a fost determinată o latură a reţelei de triangulaţie se calculează eroarea relativă a laturii celei mai puţin precise considerată de regulă la mijlocul reţelei. In acest scop, în afara ecuaţiilor de condiţie arătate mai sus şi necesare pentru compensare se mai formează o ecuaţie care se numeşte ecuaţia funcţiei de greutate.

Arătăm modul de formare al acestei ecuaţii considerând din nou reţeaua gen lanţ de patrulatere din figura precedentă

(fig.6.4) şi admitem că cea mai slabă determinare ar fi pentru latura P_1P_3.

A scrie ecuaţia funcţiei de greutate cu referire la latura P_1P_3 înseamnă a stabili mai întâi lungimea acesteia ca funcţie de mărimile date şi măsurate . In acest scop se porneşte de la una din laturile cunoscute, pe traseul cu un număr mic de triunghiuri. Pornind de la latura AB avem :

$$(P_1P_3) = \frac{\sin[(\hat{2}) + (\hat{3})]\sin(\hat{8})\sin[(\hat{9}) + (\hat{10})]}{\sin(\hat{4})\sin[(\hat{6}) + (\hat{7})]\sin(\hat{11})} AB \tag{6.63}$$

In continuare, se stabileşte creşterea logaritmului laturii P_1P_3 prin dezvoltarea în serie a logaritmilor factorilor din expresia de mai sus:

$$\Delta \log P_1P_3 = d_{2-3}(v_2 + v_3) - d_4 v_4 + d_8 v_8 - \tag{6.64}$$
$$-d_{6-7}(v_6 + v_7) + d_{9-10}(v_9 + v_{10}) - d_{11}v_{11}$$

Relaţia 6.64, reprezintă ecuaţia funcţiei de greutate.

Ecuaţia se ataşează la sistemul general de ecuaţii de condiţii şi se rezolvă pe coloana ponderilor simultan cu sistemul de ecuaţii normale.Va rezulta ponderea funcţiei de greutate Q_{ff} după relaţia :

$$Q_{ff} = [ffr] \tag{6.65}$$

în care :

r- numărul total de ecuaţii de condiţie

Eroarea "m" de determinare a lungimii laturii, exprimată în unități de-al șaselea ordin zecimal al logaritmului se obține cu formula :

$$m = m_0 \sqrt{Q_{ff}} \qquad (6.66)$$

în care :

m_0 – eroarea medie a unui unghi obținut după compensare.

Cum în general :

$$\frac{m_x}{x} = \frac{m \log x}{M} \qquad (6.67)$$

rezultă în cazul nostru, că eroarea relativă va fi dată de relația :

$$\frac{m_{P_1P_3}}{P_1P_3} = \frac{m_0 \sqrt{Q_{ff}}}{M \cdot 10^6} \qquad (6.68)$$

Pentru a afla precizia cu care au fost determinate azimutele sau coordonatele punctelor din rețea se procedează analog, respectiv pentru fiecare caz în parte, se determină în prealabil funcția de greutate corespunzătoare.

Formarea ecuațiilor normale și calculul corecțiilor

Din teoria măsurătorilor condiționate rezultă că numărul total de condiții geometrice ce trebuie să le îndeplinească o rețea de triangulație, determină un număr corespunzător de ecuații de condiții.

Aceste ecuații, alcătuiesc sistemul ecuațiilor de erori, a cărui formă generală este :

$$\begin{aligned} &a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n + w_1 = 0 \\ &b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n + w_2 = 0 \\ &.................................... \\ &r_1v_1 + r_2v_2 + ... + r_nv_n + w_r = 0 \end{aligned} \qquad (6.69)$$

Caracteristica principală a acestui sistem constă în aceea că numărul ecuațiilor de condiție este mai mic decât numărul de necunoscute, adică :

$$r<n \qquad (6.70)$$

In cazul în care corecțiile satisfac condiția :

$$[vv] = \text{minim} \qquad (6.71)$$

sistemul ecuațiilor de corecții, devine determinat și are forma :

$$\begin{aligned} [aa]k_1 + [ab]k_2 + ... + [ar]k_r + w_1 &= 0 \\ [bb]k_2 + ... + [br]k_r + w_2 &= 0 \\ .... & \\ [rr]k_r + w_r &= 0 \end{aligned} \qquad (6.72)$$

Prin rezolvarea sistemului se obțin corelatele $k_1, k_2, ..., k_r$ cu ajutorul cărora se calculează corecțiile folosind relațiile :

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + ... + r_i k_r;\ i = 1, 2, ..., n \quad (6.73)$$

Calculul coordonatelor punctelor de triangulație

Calculul complet al unei rețele de triangulație se finalizează cu stabilirea valorilor care definesc poziția în plan a punctelor ce formează rețeaua, deci cu calculul coordonatelor "x", "y" al acestora.

Pentru aceasta, după ce direcțiile măsurate au fost reduse în planul de proiecție, iar unghiurile stabilite din direcții, corectate (compensate) conform cu condițiile geometrice ce trebuie să le îndeplinească rețeaua de triangulație; se procedează la calculul orientărilor, laturilor și în cele din urmă la calculul coordonatelor.

Modul de calcul al elementelor arătate nu diferă de cel cunoscut în cadrul cursului de Topografie generală și aplicat în rețele de triangulație de ordin inferior.

Dacă de exemplu, considerăm rețeaua de triangulație de forma unui lanț de patrulatere (fig6.4), cu privire la latura AP_2 putem scrie :

$$\theta_{AP_2} = \theta_{AB} + (\hat{1})$$
$$AP_2 = \frac{AB}{\sin(\hat{4})}\sin[(\hat{2}) + (\hat{3})] \quad (6.74)$$

și cu acestea :

$$x_{P_2} = x_A + AP_2 \cos\theta_{AP_2} \quad (6.75)$$
$$y_{P_2} = y_A + AP_2 \sin\theta_{AP_2}$$

In mod analog se procedează în continuare pentru calculul coordonatelor punctelor P_1, P_3, P_4.

6.5.Stabilirea condițiilor geometrice pentru rețele închise

Considerăm rețeaua de triangulație subordonată închisă (fig.6.5.).

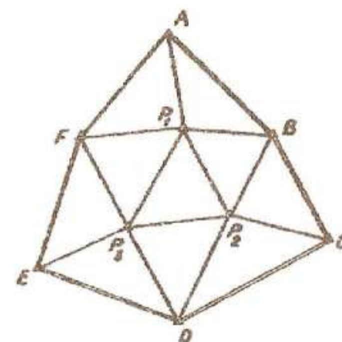


Fig.6.5.Rețea de triangulație închisă

Toate vizele din rețea sunt duble, iar punctele A, B, C,..., F sunt date.

Aplicând relațiile de calcul a condițiilor geometrice prezentate, anterior rezultă :

- 10 ecuații de figură;
- 3 ecuații de tur de orizont;
- 6-1=5 ecuații de unghi fix;
- 3 ecuații de poli;
- (6-1)-2=3 ecuații de baze.

TOTAL 24 ecuații

Observații:

In unele cazuri condițiile de poli pot fi înlocuite cu cele de baze și invers.

In exemplul de mai sus în loc de trei condiții de baze și trei poli se pot lua, o condiție de poli și cinci de baze.

La rețelele de triangulație închise, față de numărul ecuațiilor stabilit cu relațiile prezentate anterior,se scad o ecuație unghiulară și două ecuații de laturi ,deoarece ar rezulta un surplus de ecuații care ar duce la o nedeterminare.

6.6.Stabilirea ecuațiilor de erori pentru o rețea dependentă

Se presupune că la fiecare din rețelele luate în studiu punctele și direcțiile sunt reprezentate în plan pentru un sistem de proiecție oarecare, cilindric sau stereografic.

Deasemenea ecuațiile de condiție se vor scrie pentru cazul în care compensarea se realizează pe unghiuri și nu pe direcții.

Pentru scrierea ecuațiilor de condiție (ecuații de corecții) considerăm mai întâi cazul rețelei de triangulație din fig.6.6.

In acest caz vor exista ecuații de figură, de tur de orizont, de laturi, de baze și de unghi fix:

$$r = \omega - 2p + 4 = 20 - 2*7 + 4 = 10$$

$$w_l = l_l - p_l + l = 13 - 7 + 1 = 7$$

$$W_2 = 1$$

$$s == l - 2p + 3 = 13 - 2*7 + 3 = 2$$

$$r = w_1 + w_2 + s = 7 + 1 + 2 = 10$$

$$n_\theta = N_\theta - 12 - 1 = 1$$

$$n_b = N_b - 1 = 2 - 1 = 1$$

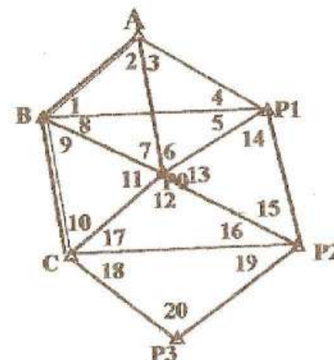


Fig 6.6.Rețea de triangulație dependentă

Ecuațiile de figură:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + w_1 = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_7 + v_8 + w_2 = 0$$

$$v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + w_3 = 0$$

$$v_{13} + v_{14} + v_{15} + w_4 = 0$$

$$v_{12} + v_{16} + v_{17} + w_5 = 0$$

$$v_9 + v_{10} + v_{11} + w_6 = 0$$

$$v_{18} + v_{19} + v_{20} + w_7 = 0$$

în care :

"w_i" se calculează ca o diferență dintre suma unghiurilor în triunghiurile menționate mai sus și 200^g.

Ecuația de punct central:

$$v_6 + v_7 + v_{11} + v_{12} + v_{13} + w_8 = 0$$

în care:

$$w_8 = \hat{6} + \hat{7} + \hat{11} + \hat{12} + \hat{13} - 400^g$$

Ecuația de de unghi fix:

$$v_1 + v_8 + v_9 + w_9 = 0$$

în care:

$$w_9 = \hat{1} + \hat{8} + \hat{9} - (\theta_{BC} - \theta_{BA})$$

Ecuația de pol sau de laturi:

$$d_8 v_8 - d_5 v_5 + d_{14} v_{14} - d_{16} v_{16} - d_{17} v_{17} + d_{10} v_{10} - d_9 v_9 + w_{10} = 0$$

în care:

$$w_{10} = \frac{\rho^{cc}}{M}(P_1 - P_2)$$

$$P_1 = \lg \sin\hat{8} \sin\hat{14} \sin\hat{16} \sin\hat{110}$$

$$P_2 = \lg \sin\hat{5} \sin\hat{15} \sin\hat{17} \sin\hat{9}$$

$$d_1 v_1 - d_2 v_2 + d_3 v_3 - d_4 v_4 + d_5 v_5 - d_6 v_6 + d_7 v_7 - d_8 v_8 + w_{11} = 0$$

unde :

$$w_{11} = \rho^{cc}\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$P_1 = \sin\hat{1} \sin\hat{3} \sin\hat{5} \sin\hat{7}$$

$$P_2 = \sin\hat{2} \sin\hat{4} \sin\hat{6} \sin\hat{8}$$

Ecuația de baze:

$$d_{11} v_{11} - d_{10} v_{10} + d_2 v_2 - d_7 v_7 + \rho^{cc} \frac{v_{AB}}{AB} - \rho^{cc} \frac{v_{BC}}{BC} + w_{12} = 0$$

$$w_{12} = \rho^{cc}\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$P_1 = AB \sin\hat{11} \sin\hat{2}$$

$$P_2 = BC \sin\hat{10} \sin\hat{7}$$

Formarea ecuațiilor normale și calculul corecțiilor

Din teoria măsurătorilor condiționate rezultă că, numărul total de condiții geometrice ce trebuie să le îndeplinească o rețea de triangulație, determină un număr corespunzător de ecuații de condiții.

Aceste ecuații, alcătuiesc sistemul ecuațiilor de erori, a cărui formă generală este :

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_{20} v_{20} + w_1 = 0$$
$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_{20} v_{20} + w_2 = 0$$

....

$$l_1v_1 + l_2v_2 + ... + l_{20}v_{20} + w_{12} = 0$$

Punând condiția de minim:

$$[vv] = \text{minim}$$

se obține sistemul normal de ecuații:

$$[aa]k_1 + [ab]k_2 + ... + [al]k_{12} + w_1 = 0$$

$$[bb]k_2 + ... + [bl]k_{12} + w_2 = 0$$

....

$$[ll]k_{12} + w_{12} = 0$$

Prin rezolvarea sistemului normal de ecuații rezultă corelatele $k_1, k_2, ..., k_{12}$, cu ajutorul cărora se calculează corecțiile:

$$v_i = a_ik_1 + b_ik_2 + ... + l_ik_{12} \qquad i = 1, 2, ..., 20$$

și în final se calculează valoarea cea mai probabilă a unghiurilor:

$$(\hat{1}) = \hat{1} + v_1, (\hat{2}) = \hat{2} + v_2, ..., (\hat{20}) = \hat{20} + v_{20}$$

6.7.Cazuri particulare de rețele de triangulație

Cunoscute sub numele de încadrări de puncte geodezice noi în elemente geodezice fixe, aceste cazuri particulare sunt frecvent întâlnite în rețelele de triangulație existente .

Ansamblul de puncte noi și vechi cu direcțiile de legătură măsurate, formează o rețea de triangulație simplă, care se rezolvă utilizând teoria măsurătorilor condiționate.

Se vor analiza în cele ce urmează câteva cazuri de încadrări de puncte geodezice noi, sau rețele de puncte noi în elemente geodezice fixe.

Analiza constă în stabilirea numărului de condiții geometrice și formarea ecuațiilor de erori pentru fiecare caz în parte.

In rest, rezolvarea sistemului format din ecuațiile de erori, compensarea unghiurilor, calculul orientărilor, laturilor și coordonatelor punctelor noi, reprezintă etape de calcul care nu diferă de metoda cunoscută, fapt pentru care nu va face obiectul viitoarelor încadrări.

6.7.1.Incadrarea unui punct staționabil într-un unghi fix

a. Punctul de încadrat staționabil :

Fie unghiul fix ABC format din direcțiile fixe BA și BC și un punct staționabil „P_0" situat în interiorul acestui unghi. (fig.6.7).

Elementele date în rețeaua formată de punctele A,B,C, P_0 sunt coordonatele punctelor A, B, C.

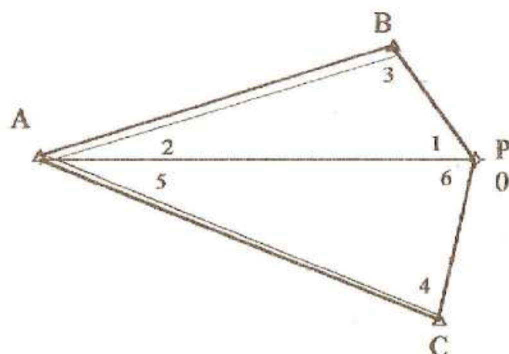


Fig.6.7.Incadrarea unui punct într-un unghi fix

Elementele măsurate sunt unghiurile notate cu 1, 2, ...,6 (stabilite din direcțiile măsurate în fiecare punct de stație), Se pune problema compensării unghiurilor obținute din măsurători astfel încât acestea să satisfacă condițiile geometrice.

Pentru compensare se stabilește numărul condițiilor geometrice, mai întâi, considerând rețeaua independentă, după care se adaugă condițiile ce sunt impuse de legătura cu punctele vechi ale acestei rețele.

Rezultă :

$$w_1 = l_1 - p_1 + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$$

$$w_2 = 0$$

$$s = 1 - 2p + 3 = 5 - 8 + 3 = 0$$

Total $r = \omega - 2p + 4 = 6 - 8 + 4 = 2$

La condițiile geometrice stabilite pentru rețele independente se adaugă condițiile pentru rețele constrânse, care se prezintă sub forma:

- $n_\theta = N_\theta - 1 = 2 - 1 = 1$ ecuații de orientări (în cazul nostru de unghi fix)
- $n_b = N_b - 1 = 2 - 1 = 1$ ecuații de bază
-

Conform cu numărul condițiilor geometrice stabilite, ecuațiile de erori sunt :

$$v_1 + v_2 + v_3 + w_1 = 0$$

$$v_4 + v_5 + v_6 + w_2 = 0$$

$$v_2 + v_5 + w_3 = 0$$

$$d_1 v_1 - d_3 v_3 + d_4 v_4 - d_6 v_6 + w_4 = 0$$

în care :

$$w_1 = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} - 200^g$$

$$w_2 = \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} - 200^g$$

$$w_3 = \hat{2} + \hat{5} - (\theta_{BC} - \theta_{BA})$$

$$w_4 = \frac{\rho^{cc}}{M} \log \frac{BC \sin\hat{1} \sin\hat{4}}{AB \sin\hat{3} \sin\hat{6}}$$

6.7.2.Incadrarea unui punct nestaționabil într-un unghi fix

Acesta se deosebește de precedentul prin aceea că punctul „P_0" nu este staționabil și în consecință unghiurile din acest punct nu se pot măsura.(fig.6.8).

Aplicând relațiile cunoscute s-a stabilit numărul condițiilor geometrice ,după cum urmează:

$$w_1 = l_1 - p_1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$$
$$w_2 = 0$$
$$s = 1 - 2p + 3 = 5 - 8 + 3 = 0$$
$$n_\theta = N_\theta - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$n_b = N_b - 1 = 2 - 1 = 1$$

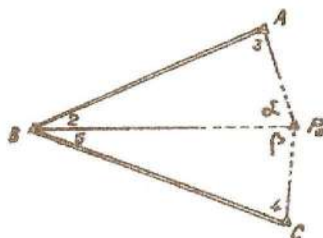


Fig 6.8 Incadrarea unui punct nestaționabil

Pentru condițiile stabilite se scriu ecuațiile de erori:

$$v_2 + v_5 + w_1 = 0$$

$$d_{2-3}v_2 + d_{2-3}v_3 - d_3v_3 + d_4v_4 - d_{4-5}v_4 - d_{4-5}v_5 + w_2 = 0$$

în care :

$$w_1 = \hat{2} + \hat{5} - (\theta_{BC} - \theta_{BA})$$

$$w_2 = \frac{\rho^{cc}}{M}\log\frac{\sin(\hat{2}+\hat{3})\sin\hat{4}}{\sin\hat{3}\sin(\hat{4}+\hat{5})}$$

6.7.3.Incadrarea unui punct într-un triunghi fix

Fie triunghiul construit din punctele date A, B, C și un punct „P_0" ce urmează a fi încadrat. (fig.6.9).

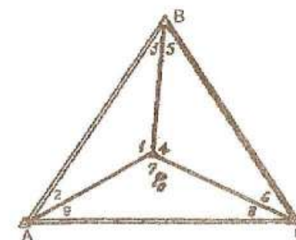


Fig 6.9.Incadrarea unui punct
într-un triunghi închis

In cazul în care punctul „P_0" este staționabil, unghiurile măsurate sunt în număr de 9, notate conform figurii (6.9).

Dacă ținem seama de faptul că punctul „P_0" se află în interiorul conturului poligonal închis ABC, numărul condițiilor geometrice ce trebuie să le îndeplinească rețeaua este :

$$w_1 = l_1 - p_1 + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$$
$$w_2 = 1$$
$$s = 1 - 2p + 3 = 6 - 8 + 3 = 1$$

Total $r = \omega - 2p + 4 = 9 - 8 + 4 = 5$

la care se adaugă condițiile de orientări (unghi fix), din care se scade o condiție unghiulară și 2 condiții liniare :

$$n_\theta = N_\theta - 1 = 2$$
$$n_b = N_b - 1 - 2 = 0$$

Aceste condiții conduc la următorul sistem de erori :

$$v_1 + v_2 + v_3 + w_1 = 0$$
$$v_4 + v_5 + v_6 + w_2 = 0$$
$$v_7 + v_8 + v_9 + w_3 = 0$$
$$v_1 + v_4 + v_7 + w_4 = 0$$
$$v_2 + v_9 + w_5 = 0$$
$$v_3 + v_5 + w_6 = 0$$
$$d_2 v_2 - d_3 v_3 + d_5 v_5 - d_6 v_6 + d_8 v_8 - d_9 v_9 + w_7 = 0$$

Modul de calcul al termenilor liberi este analog cu cel prezentat în cazurile precedente.

Problema poate fi tratată și pentru cazul când, punctul „P" este nestaționabil. Lipsind unghiurile de centru vor exista numai trei condiții de unghi fix și o condiție de laturi sau de pol.

6.7.4.Incadrarea unui lanț de triunghiuri într-un unghi fix

Fie unghiul fix ABC și lanțul de triunghiuri ABP_1P_2C cu punctele ce urmează a se determina „P_1" și „P_2". Pentru acest caz trebuie îndeplinite trei condiții de figură, o condiție de unghi fix și o condiție de baze. (fig.6.10).

Ecuațiile de erori corespunzătoare condițiilor geometrice au forma:

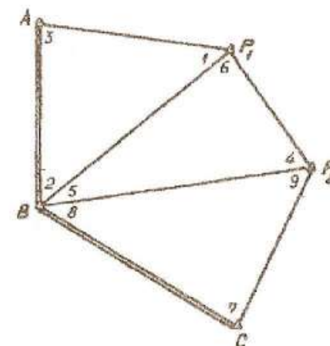


Fig.6.10.Incadrarea unei rețele într-un unghi fix

$$v_1+v_2+v_3+w_1=0$$
$$v_4+v_5+v_6+w_2=0$$
$$v_7+v_8+v_9+w_3=0$$
$$v_2+v_5+v_8+w_4=0$$
$$d_1v_1-d_3v_3+d_4v_4-d_6v_6+d_7v_7-d_9v_9+w_5=0$$

în care :

$$w_1=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}-200^g$$
$$w_2=\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}-200^g$$
$$w_3=\hat{7}+\hat{8}+\hat{9}-200^g$$
$$w_4=\hat{2}+\hat{5}+\hat{8}-(\theta_{BC}+\theta_{AB})$$
$$w_5=\frac{\rho^{cc}}{M}\log\frac{BC\sin\hat{1}\sin\hat{4}\sin\hat{7}}{AB\sin\hat{3}\sin\hat{6}\sin\hat{9}}$$

Problema se tratează similar pentru cazul când, punctele „P_1" și „P_2" sunt nestaționabile.

6.7.5.Incadrarea a două patrulatere într-un unghi fix

Considerăm patrulaterele ABP_2P_1 și BCP_3P_2 situate în interiorul unghiului fix ABC. (fig.6.11).

Ca și în cazurile precedente determinăm numărul condițiilor geometrice pe care trebuie să le îndeplinească rețeaua cu ajutorul relațiilor cunoscute și obținem :

- 6 condiții de figură;
- 2 condiții de laturi;
- 1 condiție de unghi fix;
- 1 condiție de baze.

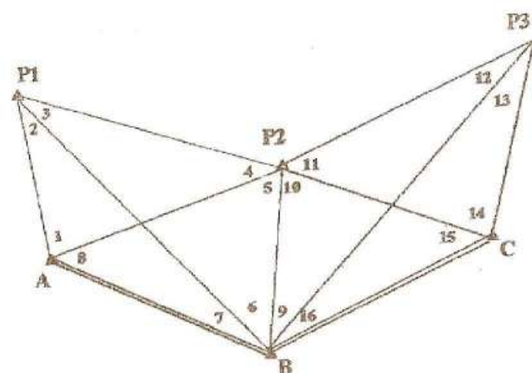


Fig.6.11.Incadrarea a două patrulatere într-un unghi fix

Scriind ecuațiile corespunzătoare se formează sistemul :

$$v_1+v_2+v_3+v_4+w_1=0$$
$$v_5+v_6+v_7+v_8+w_2=0$$
$$v_9+v_{10}+v_{11}+v_{12}+w_3=0$$
$$v_{13}+v_{14}+v_{15}+v_{16}+w_4=0$$
$$v_3+v_4+v_5+v_6+w_5=0$$
$$v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{14}+w_6=0$$
$$v_6+v_7+v_9+v_{16}+w_7=0$$
$$d_1v_1-d_2v_2+d_3v_3-d_4v_4+d_8v_8-d_5v_5+d_6v_6-d_7v_7+w_8=0$$
$$d_9v_9-d_{10}v_{10}+d_{11}v_{11}-d_{12}v_{12}+d_{13}v_{13}-d_{14}v_{14}+d_{15}v_{15}-d_{16}v_{16}+w_9=0$$
$$d_5v5-d_8v_8+d_{15}v_{15}-d_{10}v_{10}+w_{10}=0$$

în care :

$$w_1 = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} - 200^g$$
$$w_2 = \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} - 200^g$$
$$w_3 = \hat{9} + \hat{10} + \hat{11} + \hat{12} - 200^g$$
$$w_4 = \hat{13} + \hat{14} + \hat{15} + \hat{16} - 200^g$$
$$w_5 = \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} - 200^g$$
$$w_6 = \hat{11} + \hat{12} + \hat{13} + \hat{14} - 200^g$$
$$w_7 = \hat{7} + \hat{6} + \hat{9} + \hat{16} - (\theta_{BC} + \theta_{AB})$$
$$w_8 = \rho^{cc}\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)$$

unde:

$$P_1 = \sin\hat{1}\sin\hat{3}\sin\hat{5}\sin\hat{7};\ P_2 = \sin\hat{2}\sin\hat{4}\sin\hat{6}\sin\hat{8}$$
$$w_9 = \rho^{cc}\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)$$

unde:

$$P_1 = \sin\hat{9}\sin\hat{11}\sin\hat{13}\sin\hat{15};\ P_2 = \sin\hat{10}\sin\hat{12}\sin\hat{14}\sin\hat{16}$$

$$w_{10} = \frac{\rho^{cc}}{M}\lg\frac{BC\sin\hat{1}\sin\hat{4}\sin\hat{7}}{AB\sin\hat{3}\sin\hat{6}\sin\hat{9}}$$

7.NIVELMENTUL GEODEZIC

Nivelmentul geodezic se referă la determinarea înălțimii unor puncte, situate pe suprafața terestră, amplasate la distanțe mari unele de altele și ca atare va lua în considerare neparalelismul între suprafețele de nivel, și de asemenea corecțiile de sfericitate și refracție.

In funcție de instrumentele utilizate la determinarea diferențelor de nivel, diferențe cu ajutorul cărora se calculează înălțimile punctelor, nivelmentul geodezic se clasifică în: nivelment geometric, realizat cu ajutorul nivelelor, și nivelment trigonometric realizat cu ajutorul teodolitelor . In acest capitol nu se vor face referiri la celelalte metode de determinare a altitudinii (cotelor) punctelor, precum nivelmentul barometric, nivelmentul hidrostatic etc.

Inainte de a trece la tratarea efectivă a nivelmentului geodezic se va face o prezentare succintă a sistemelor de altitudini utilizate în geodezie.

7.1.Sisteme de altitudini

In funcție de suprafața de referință utilizată și semnificația geometrică sau fizică, prin care se descrie poziția punctelor pe suprafața terestră, sistemele de altitudini se clasifică în:

- dinamice;
- ortometrice;
- normale;
- elipsoidale.

7.1.1. Sistemul de altitudini dinamice

Altitudinea dinamică a unui punct (H^D), noțiune introdusă de Helmert în 1873, reprezintă raportul dintre diferența de potențial a două suprafețe de nivel, la valoarea gravității normale pentru latitudinea de 45^0, raportată la elipsoidul de referință.

Diferența de potențial, luată cu semn schimbat, se referă la o suprafață de nivel oarecare, care trece prin punctul „P" și suprafața de nivel zero care trece prin punctul „O" situat pe geoid. Relația de calcul se prezintă sub forma:

$$H_P^D = \frac{-\int_O^P dW}{\gamma_{45^0}} = \frac{-(W_P - W_O)}{\gamma_{45^0}} = \frac{C_P}{\gamma_{45^0}} \qquad (7.1)$$

unde :

W_0 – potențialul geoidului (W_0 =6263686 ±3).10 m^2s^{-2});

W_P – potențialul suprafeței de nivel care trece prin punctul „P".

Diferența dintre $-(W_P - W_O)$ se numește ***numărul geopotențial (C_P)*** al punctului „P", noțiune introdusă în anul 1955 de către Asociația Internațională a Geodezilor.

Numărul geopotențial al unui punct situat pe suprafața terestră reprezintă diferența negativă dintre potențialul suprafeței de nivel care trece prin punctul considerat și potențialul geoidului.

Din punct de vedere dimensional altitudinile dinamice sunt exprimate în metri, însă ele nu au semnificația geometrică, de a reprezenta înălțimea de la o anumită suprafață la punctul considerat.

Altitudinile dinamice păstrează semnificația fizică generală de împărțire a numerelor potențiale cu o valoare constantă aleasă în mod convențional.

Cotele dinamice se caracterizează printr-o proprietate deosebită și anume: ***punctele situate pe o anumită suprafață de nivel au aceleași cote dinamice***

Pentru două puncte „A" și „B" diferența de nivel dinamică poate fi scrisă sub forma:

$$\Delta H_{AB}^D = H_B^D - H_A^D = \frac{1}{\gamma_{45^0}}(C_B - C_A) \qquad (7.2)$$

sau ținând seama de ecuația fundamentală se poate scrie:

$$\Delta H_{AB}^D = \frac{1}{\gamma_{45^0}}\int_A^B g dh \qquad (7.3)$$

In continuare relația se poate transforma:

$$\Delta H_{AB}^D = \frac{1}{\gamma_{45^0}}\int_A^B (g - \gamma_{45^0} + \gamma_{45^0})dh = \int_A^B dh + \int_A^B \frac{g - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} dh \quad (7.4)$$

Efectuând notațiile:

$$\Delta h_{AB} = \int_A^B dh = \sum_A^B dh \qquad (7.5)$$

$$\delta_{AB}^D = \int_A^B \frac{g - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} dh \simeq \sum_A^B \frac{g - \gamma_{45^0}}{\gamma_{45^0}} dh \qquad (7.6)$$

relația 7.4 devine:

$$\Delta H_{AB}^{D} = \Delta h_{AB} + \delta_{AB}^{D} \qquad (7.7)$$

unde:

Δh_{AB} - diferenţa de nivel măsurată;

δ_{AB}^{D} - corecţia dinamică pe traseul AB.

Sistemul de cote dinamice a stat la baza creării reţelei de nivelment din Europa de vest.

7.1.2.Sistemul de altitudini ortometrice

In cazul cotelor ortometrice suprafaţa de referinţă este geoidul (noţiune introdusă de Listing în anul 1873), iar altitudinea ortometrică (H_P^{OR}) este segmentul liniei de forţă cuprins între poziţia punctului „P" de pe suprafaţa terestră şi proiecţia sa „P_0" pe geoid (fig.7.1).

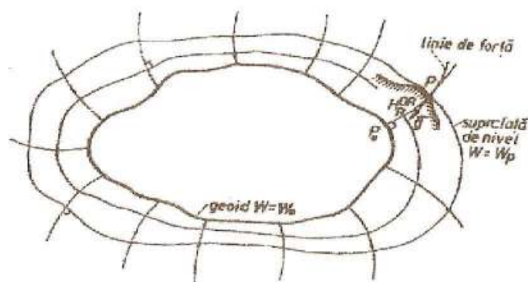


Fig.7.1. Suprafeţe de nivel

Geoidul este o suprafaţă de nivel echipotenţială, care are proprietatea, că în oricare din punctele sale, direcţia liniilor de forţă este perpendiculară pe această suprafaţă . Tangenta la

linia de forţă într-un punct „P" dă direcţia gravităţii „$\vec{g}$" , materializată de poziţia firului cu plumb. Geoidul este definit uzual ca suprafaţa medie a mărilor şi oceanelor prelungită imaginar pe sub continente.

Conform teoriei potenţialului în orice punct din spaţiu se poate scrie ***ecuaţia fundamentală***:

$$dW = - g\ dh, \qquad (7.8)$$

Prin această ecuaţie se stabileşte dependenţa dintre depărtarea „dh" şi diferenţa de potenţial „dW" existentă între două suprafeţe de nivel infinit apropiate.

Din relaţia (7.8) rezultă:

$$dh = -\frac{dW}{g} \qquad (7.9)$$

sau:

$$\int_0^{H_P^{OR}} dh = -\int_{W_0}^{W_P} \frac{dW}{g} \qquad (7.10)$$

integrând se obţine:

$$H_P^{OR} = \frac{-(W_P - W_0)}{\overline{g}_m} = \frac{C_P}{\overline{g}_m} \qquad (7.11)$$

Prin „$\overline{g}_m$"s-a notat valoarea medie a gravitaţiei în lungul liniei de forţă.

In funcție de (7.11) se poate spune că ***altitudinea ortometrică*** „H^{OR}„se obține prin împărțirea numărului geopotențial la valoarea medie a gravității în lungul liniei de forță.

După Moldoveanu [13] valoarea medie a gravității este dată de relația:

$$\overline{g}_P = g_P + 0.0424 H_P^{OR} \quad (7.12)$$

unde:

g_P – valoarea gravității măsurată la nivelul punctului „P".

7.1.2.1.Neparalelismul suprafețelor de nivel

In cadrul nivelmentului geometric s-a admis ipoteza că suprafețele de nivel sunt concentrice și paralele între ele. Dacă acest lucru este posibil pentru zone restrânse, nu mai este posibil pentru zone mari, din domeniul Geodeziei. Este cunoscut, că atât suprafața de nivel zero (geoidul), cât și suprafețele de nivel gravitaționale au forma convențională de elipsoid. Suprafețele acestor elipsoizi nu sunt paralele, după cum se va vedea în continuare.

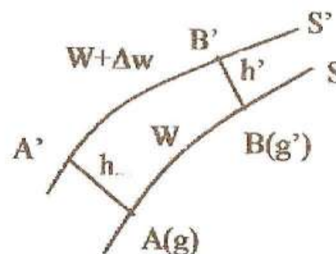


Fig.7.2.Secțiune prin două suprafețe de nivel

Deoarece suprafețele de nivel sunt suprafețe echipotențiale, diferența de potențial dintre două suprafețe de nivel este o mărime constantă. Rezultă că, creșterea de potențial (de lucru mecanic) nu depinde de drumul parcurs pentru trecerea unui punct de pe o suprafață de nivel pe alta.

Considerând două suprafețe de nivel gravitaționale apropiate „S" si S' și două traiectorii ortogonale AA' și BB' reprezentând direcțiile verticalelor (fig.7.2), atunci lungimile segmentelor pe verticale AA'= h și BB'= h' le considerăm rectilinii, deși în realitate sunt ușor curbilinii.

Utilizând lucru mecanic al forței de greutate, pentru o masă unitară, se poate afirma, că aceasta nu depinde de drum atunci când ne deplasăm din punctul „A" în punctul B'. Astfel se poate scrie:

$$L_{AA'B'} = L_{ABB'} \quad (7.13)$$

dar:

$$L_{AA'B'} = L_{AA'} + L_{A'B'}$$
$$L_{ABB'} = L_{AB} + L_{BB'}$$

Având în vedere că lucrul mecanic (creșterea de potențial) este egal cu intensitatea forței înmulțită cu deplasarea și că pe o suprafață de nivel este nul, rezultă:

$$L_{AA'} = gh \quad L_{A'B'} = 0$$
$$L_{AB} = 0 \quad L_{BB'} = g'h' \quad (7.14)$$

S-a notat cu „g" și g' intensitatea forței de greutate în punctele „A" și „B", iar cu „h" și h' depărtările dintre cele două suprafețe de nivel în dreptul punctelor anterior menționate.

Conform relației (7.8) se poate scrie:

$$dW=-gh=-g'h' \tag{7.15}$$

sau:

$$h=\frac{dW}{g};\quad h'=\frac{dW}{g'}; \tag{7.16}$$

Cum însă intensitățile forțelor de greutate sunt diferite în puncte diferite, deci $g \neq g'$ rezultă că și $h \neq h'$.

Din măsurătorile gravimetrice se cunoaște că „g" variază cu latitudinea. și considerând $g \equiv \gamma$, formula gravității normale stabilită de Clairaut are forma:

$$\gamma_0=\gamma_e(1+\beta\sin^2\varphi-\beta_1\sin^2 2\alpha) \tag{7.17}$$

unde:

γ_e- gravitatea normală la ecuator;

γ_0- gravitatea normală în punctul de latitudine „B" ;

φ - latitudinea într-un punct oarecare;

β- turtirea gravimetrică (f*), care se calculează, după Clairaut, cu relația:

$$\beta=\frac{\gamma_P-\gamma_e}{\gamma_e} \tag{7.18}$$

unde:

γ_P - gravitatea normală la pol;

α - turtirea elipsoidului ($\alpha=\frac{a-b}{a}$);

a, b – semiaxa mare și respectiv mică a elipsoidului.

$$\beta_1=\frac{\alpha^2}{8}+\frac{\alpha\beta}{4} \tag{7.19}$$

Observație: In capitolul de Geodezie elipsoidală pentru latitudinea geodezică s-a utilizat notația „B", iar pentru turtirea elipsoidului notația „f".

Gravitatea normală dă valori care se referă la suprafața elipsoidului de rotație ales.

Pentru a calcula mărimea „g" a gravității normale la anumite înălțimi „H" de la elipsoid - înălțime luată pe direcția normalei la suprafața acestuia în punctul respectiv, se aplică relația:

$$g=g_0+\frac{\partial g}{\partial h}H \tag{7.20}$$

în care:

$\frac{\partial g}{\partial h}$ - gradientul vertical al gravității normale,

($\frac{\partial g}{\partial h}$ = - 0, 0848 gal/km);

H – înălțimea deasupra elipsoidului.

Semnul minus al gradientului vertical al gravității arată că la o creștere a înălțimii „H" deasupra elipsoidului, corecția va fi negativă, adică la o mărire a distanței de centrul de greutate al Pământului gravitatea scade.

Valorile gravității normale sunt diferite în funcție de elipsoidul de referință considerat, astfel pentru elipsoidul internațional 1967, avem:

g_e=978,0318456 gal ;

$$g_p=983,2177279 \text{ gal}$$

Deoarece , când mergem pe suprafaţa geoidului (sau pe altă suprafaţă de nivel gravitaţională) de la ecuator la poli, gravitatea normală „g" creşte, rezultă că valoarea depărtării „h" dintre cele două suprafeţe de nivel va descreşte.

Suprafeţele de nivel gravitaţionale sunt mai apropiate între ele la pol decât la ecuator. Creşterea relativă a gravităţii normale fiind de aproximativ 5 ‰ ,când „φ" creşte de la 0^0 la 90^0 , rezultă o descreştere tot de 5 ‰ a depărtării „h".

Cum depărtările „h" considerate faţă de suprafaţa de referinţă reprezintă tocmai cotele ortometrice, rezultă că o suprafaţă de nivel oarecare are la ecuator cota ortometrică egală cu 1000 m, aceeaşi suprafaţă va avea la pol cota ortometrică egală cu 995 m.

Se observă o deosebire netă privind modul de stabilire a cotelor ortomerice, în comparaţie cu cele cunoscute la Topografie, când suprafeţele de nivele se considerau plane sau sferice.

Intrucât nivelmetrele realizează linii de viză într-un plan orizontal, se impune introducerea unor corecţii pentru a realiza trecerea de la mărimile măsurate după plane orizontale paralele la mărimi corespunzătoare suprafeţelor de nivel elipsoidale şi neparalele.

Presupunem că se execută un nivelment geometric între două puncte „A" şi „B" pentru a se stabili diferenţa de nivel dintre aceste puncte.

Considerând traseul mai sus menţionat împărţit în niveleurile 12,23,..., iar diferenţele de nivel corespunzătoare notate cu $\Delta z_{12}, \Delta z_{23}...$, respectiv lecturile înapoi notate cu „r" şi cu „v" lecturile înainte pe miră, pentru cazul primului niveleu se poate scrie:

$$rg_1 = (v + \Delta z_1)g_2 \tag{7.21}$$

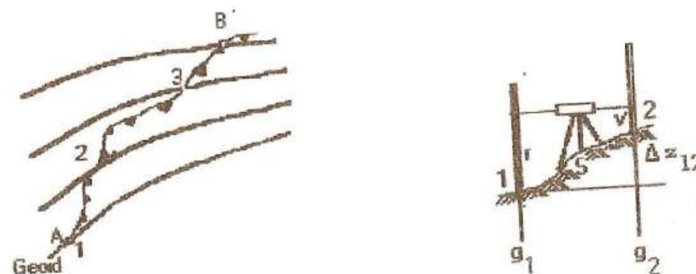


Fig.7.3 Drumuirea de nivelment

S-a notat cu „g_1" şi „g_2" intensitatea forţei de greutate în punctele 1 şi 2, iar cu „r" şi „v" lecturile pe mirele verticale situate în aceste puncte. Dezvoltând relaţia de mai sus obţinem:

$$\Delta z_{12} g_2 = rg_1 - vg_2 \tag{7.22}$$

sau adunând şi scăzând „rg_2" obţinem:

$$\Delta z_1 g_2 = rg_1 - vg_2 - rg_2 + rg_2 \tag{7.23}$$

de unde:

$$\Delta z_{12} = (r - v) + r\frac{(g_1 - g_2)}{g_2} \tag{7.24}$$

In relația (7.24) termenul $r\frac{g_1 - g_2}{g_2}$ reprezintă corecția ce trebuie aplicată diferenței lecturilor pe miră pentru a obține diferența de nivel ortometrică între cele două puncte.

Pe întregul traseu avem:

$$\Delta z_{AB} = \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i = \sum_{i=1}^{n} (r_i - v_i) + \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{g_i - g_{i+1}}{g_{i+1}} \quad (7.25)$$

sau notând $\sum_{i=1}^{n}(r_i - v_i) = \Delta h_{AB}$, diferența de nivel între punctele „A" și „B", rezultată din măsurători și considerând că r = constant, putem scrie:

$$\Delta z_{AB} = \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i = \Delta h_{AB} + r\sum \frac{g_i - g_{i+1}}{g_{i+1}} \quad (7.26)$$

Mai simplu:

$$\Delta z_{AB} = \Delta h_{AB} + c_1 \quad (7.27)$$

Corecția „c_1", care se aplică diferenței de nivel măsurate în vederea obținerii diferenței de nivel ortometrice se calculează cu relația:

$$c_1 = -\beta H_{med} \sin 2\varphi_{med} \Delta\varphi \quad (7.28)$$

unde:

H_{med}- altitudinea medie;

$\Delta\varphi$ - diferența de latitudine;

φ_{med} - latitudinea medie;

β - coeficient ce indică turtirea gravimetrică.

Corecția ortometrică este negativă când se merge spre pol și pozitivă în caz contrar. In practică se aplică pe tronsoane de nivelment convenabil alese.

Relația practică utilizată pentru calculul corecției ortometrice (δ_{AB}^{OR}), dată de [13], se prezintă sub forma:

$$\delta_{AB}^{OR} = \sum_{A}^{B} \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \Delta h_{AB} + \frac{\overline{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A - \frac{\overline{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B \quad (7.29)$$

unde:

γ_0-valoarea gravității normale la latitudinea de 45^0;

$\overline{g}_A, \overline{g}_B$ - valorile medii ale gravității de-a lungul liniilor de forță ce trec prin punctele „A" și „B";

H_A și H_B- valorile aproximative ale cotelor punctelor „A" și „B";

Δ_{AB} – diferența de nivel măsurată.

7.1.3.Sistemul de altitudini normale

Noțiunea de altitudine normală a fost introdusă în anul 1945 de M.S.Molodenski, în scopul de-a elimina dezavantajul cotelor ortometrice, provenit din:

- raportarea la suprafața ondulată a geoidului;
- utilizarea gravității medii în lungul liniei de forță.

In acest scop se renunţă la suprafaţa geoidului ca suprafaţă de referinţă şi se introduce o suprafaţă teoretică apropiată de geoid, care nu are ondulaţii şi care se numeşte ***cvasigeoid*** sau cogeoid.In al doilea rând ***se propune utilizarea câmpului gravităţii normale în locul câmpului gravităţii.***

Cvasigeoidul este suprafaţa de nivel astfel construită încât segmentul de normală la elipsoid este egal cu anomalia altitudinii.

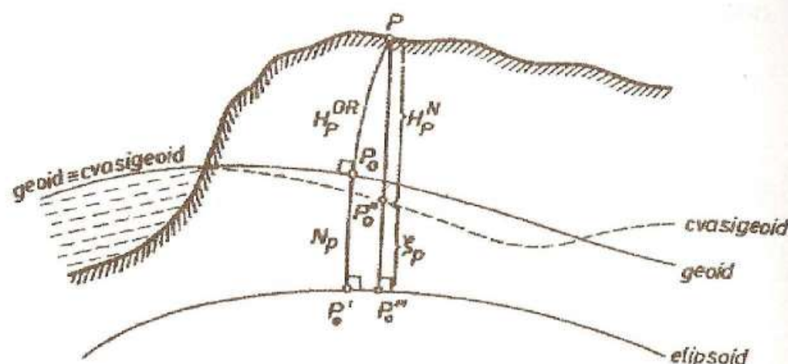


Fig.7.4. Sistemul de altitudini ortometrice şi normale

Altitudinea normală se notează cu H_P^N (fig.7.4) şi se obţine prin împărţirea numărului geopotenţial la o valoare medie a gravităţii normale:

$$H_P^N = \frac{C_P}{\bar{\gamma}} \qquad (7.30)$$

unde:

$\bar{\gamma}$-valoarea medie a acceleraţiei normale a gravităţii în lungul normalei la elipsoid

Trecerea de la diferenţele de nivel măsurate la cele normale se face prin aplicarea corecţiilor normale. Aceste corecţii se obţin din corecţiile ortometrice, prin înlocuirea gravităţii medii cu gravitatea normală medie în lungul liniei de forţă şi a altitudinii cu altitudinea normală:

$$\delta_{AB}^N = \sum_A^B \frac{g-\gamma_0}{\gamma_0}\Delta h_{AB} + \frac{\bar{\chi}_A-\gamma_0}{\gamma_0}H_A^N - \frac{\bar{\gamma}_B-\gamma_0}{\gamma_0}H_B^N \qquad (7.31)$$

După Dima [7], cotele normale se obţin prin corectarea rezultatelor nivelmentului geometric cu aşa numita corecţie normală :

$$C_N = c_1 + c_2 + c_3 \qquad (7.32)$$

unde: cei trei termeni corectivi au semnificaţia:

$$c_1 = -\beta\, H_m \Delta\varphi \sin 2\varphi_m$$
$$c_2 = \beta^2\, \Delta H \sin^4 \varphi_m \qquad (7.33)$$
$$c_3 = \frac{(g-\gamma)_m}{\gamma_m}\Delta H$$

Se observă că termenul corectiv „c_1" este însăşi corecţia ortometrică sferoidică şi este datorat neparalelismului suprafeţelor de nivel.

Termenul corectiv „c_2" este datorat reliefului terenului; în terenurile de şes nu se ia în consideraţie pentru că $\Delta H = 0$.

Termenul c_3 este datorat structurii neuniforme a scoarţei terestre în zona în care se fac măsurătorile. In acest termen corectiv intră anomalia medie a forţei de gravitate $(g - \gamma)_m$ şi

intensitatea medie teoretică γ_m a acestei forțe, valorile lor obținându-se prin măsurători gravimetrice.

De menționat faptul ca rețeaua nivelmentului de stat din țara noastră este exprimată în cote normale.

Formula recomandată, de instrucțiunile în vigoare , pentru trecerea de la diferențele de nivel măsurate la diferențe de altitudini normale este:

$$H_B^N - H_A^N = \Delta h_{AB} + \frac{(g-\gamma)_{mediu}}{\gamma_{mediu}^{H_{mediu}}}\Delta h_{AB} - \frac{(\gamma_A - \gamma_B)H_{mediu}}{\gamma_{mediu}^{H_{mediu}}} \quad (7.34)$$

unde:

$\gamma_{mediu}^{H_{mediu}}$ - valoarea accelerației gravității normale la altitudinea medie calculată pentru latitudinea medie a celor două puncte între care se execută măsurătorile de nivelment geometric;

$(g-\gamma)_{mediu}$ - valoarea medie a anomaliilor accelerației greutății corespunzătoare celor două puncte;

γ_A, γ_B - valorile normale ale accelerației gravității pentru proiecțiile pe elipsoid a celor două puncte.

7.1.4. Sisteme de altitudini elipsoidale

Revenind la suprafețele de referință, prezentate în capitolele anterioare, reiterăm, că pentru poziționarea planimetrică a punctelor suprafața de referință este elipsoidul, iar pentru altitudini geoidul.

Pentru a nu avea două suprafețe de referință separate, una pentru planimetrie și alta pentru altimetrie, este necesar ca

în lucrări speciale să se utilizeze o singură suprafață de referință – elipsoidul de rotație.

Cotele elipsoidale sunt date de înălțimile punctelor, luate pe normala la elipsoid, de la punctele situate pe suprafața terestră până la proiecția acestora pe elipsoid.

Expresiile de calcul sunt date de relația :

$$H_P^E = H_P^{OR} + N_P; \quad H_P^E = H_P^N + \zeta_P \quad (7.35)$$

unde: H_P^E -cota elipsoidală a punctului "P" ;

N – ondulația geoidului- înălțimea (pe verticală) a geoidului față de elipsoid ;

ζ –anomaliile altitudinilor, înălțimea cvasigeoidului față de elipsoid.

7.2.Nivelmentul geometric geodezic

7.2.1. Considerații generale

Baza altimetrică a ridicărilor topografice în vederea întocmirii planurilor topografice la diferite scării, o formează rețeaua nivelitică de stat.

Nivelmentul geometric de stat cuprinde rețelele de nivelment geometric de ord. I – IV și nivelmentul de intravilan, care se caracterizează printr-o înaltă precizie.

Rețeaua de nivelment de ord. I cuprinde liniile de nivelment, care se leagă cu liniile de nivelment similar al țărilor vecine , legând punctele fundamentale altimetrice.

Rețeaua de ord.I (fig.4.5) formează poligoane închise cu lungimi de 1200-1500 km ce se dezvoltă, în general, în lungul căilor ferate.

Drumuirile de nivelment de ord.I se execută pe tronsoane dus – întors, astfel ca fiecare diferență de nivel pe tronson să rezulte ca media a 8 valori. Se admite la 1 km de drumuire o eroare medie pătratică întâmplătoare $\eta = \pm 0.5$ mm și una sistematică de $\sigma = \pm 0.05$ mm; toleranța pentru eroarea medie pătratică este de $T = \pm 2 \text{ mm} \sqrt{L_{(km)}}$.

Rețeaua de ord.II se compune din liniile nivelitice sprijinite pe puncte de nivelment de ord. I, formând poligoane cu perimetrul de 500 – 600 km.

Rețeaua de ord.II se desfășoară în lungul căilor ferate, șoselelor, fluviilor și râurilor mari și se execută dus-întors cu medii din 4 valori. Toleranța totală admisă este de $T = \pm 5$ mm $\sqrt{L_{(km)}}$, iar eroarea sistematică trebuie să fie mai mică de ± 0.2 mm/ km.

Rețeaua de ord.III se dezvoltă în interiorul poligoanelor de ord.I și II așa încât să formeze poligoane sau traverse cu perimetre de 150-200 km, recomandându-se ca într-un poligon de ord II să existe 6-9 poligoane de ord. III.

Rețeaua de ord III se execută dus-întors, cu medii de 4 valori cu o precizie care să asigure obținerea unei neînchideri în poligon închis sau drumuiri cu două capete, care să nu depășească toleranța totală $T = \pm 10 \text{ mm} \sqrt{L_{(km)}}$.

Rețeaua de ord.IV îndesește rețeaua de ord..I, II și III, ea se dezvoltă astfel încât să formeze poligoane închise cu perimetrul de 100 km sau traverse având lungimi de 100 sau 50 km .

Neagră zero 1975", cu punctul fundamental plasat în capela militară Constanța.

7.2.2. Compensarea rețelelor de nivelment prin metoda măsurătorilor condiționate

Metoda observațiilor condiționate utilizată la rezolvarea rețelelor de nivelment este cunoscută sub denumirea de ***metoda poligoanelor***, întrucât numărul condițiilor geometrice este dat de numărul poligoanelor reale și fictive existente în rețea.

Numărul total de condiții geometrice „r", într-o rețea de nivelment se stabilește cu relația:

$$r = n_{pr} + n_{pf} = n_{pr} + N_V - 1 \qquad (7.36)$$

unde:

n_{pr}- numărul poligoanelor reale;
n_{pf}- numărul poligoanelor fictive;
N_V- numărul punctelor vechi.

Metoda observațiilor condiționate este mai avantajoasă decât metoda observațiilor indirecte, în cazul când, numărul punctelor noi este mai mare decât numărul condițiilor geometrice.

Metoda observațiilor condiționate se aplică la rețelele nivelitice independente sau dependente ce aparțin ord I și II.

Fie spre exemplu rețeaua nivelitică independentă formată din poligoanele închise I, II, III, IV (fig. 7.5.).

Introducem notațiile:

$h_1, h_2, \ldots h_8$ - diferențele de nivel măsurate;
$(h_1), (h_2), \ldots (h_8)$ - diferențele de nivel probabile;

$v_1, v_2, \ldots v_8$ - corecțiile probabile ale diferențelor de nivel măsurate;

$S_1, S_2, \ldots S_8$ - lungimile traverselor ce formează cele patru poligoane închise;

$p_1, p_2, \ldots p_8$ - ponderile mărimilor măsurate.

Conform relației (7.36) se calculează numărul condițiilor geometrice :

$$r = n_{pr} + N_V - 1 = 4 + 1 - 1 = 4 \qquad (7.37)$$

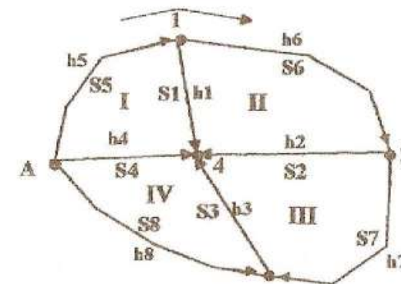


Fig.7.5.Rețea de nivelment neconstrânsă

Dacă se respectă sensul de creștere a declivităților, indicat pe figură prin săgeți, atunci în baza unui sens general de parcurgere (sensul orar), pot fi formate condițiile :

$$\begin{aligned} &(h_1) - (h_4) + (h_5) = 0 \\ &-(h_1) + (h_6) + (h_2) = 0 \\ &-(h_2) + (h_7) + (h_3) = 0 \\ &-(h_3) - (h_8) + (h_4) = 0 \end{aligned} \qquad (7.38)$$

dar:

$$\begin{aligned}(h_1) &= h_1 + v_1\\ (h_2) &= h_2 + v_2\\ &\dots\dots\dots\dots\\ (h_8) &= h_8 + v_8\end{aligned} \qquad (7.39)$$

şi astfel cele patru condiţii geometrice conduc la patru ecuaţii de corecţii de forma:

$$\begin{aligned}&v_1\ v_4 + v_5 + w_1 = 0; \quad p_1\\ &-v_1 + v_6 + v_2 + w_2 = 0; \quad p_2\\ &-v_2 + v_7 + v_3 + w_3 = 0; \quad p_3\\ &-v_3 + v_4\ v_8 + w_4 = 0; \quad p_4\end{aligned} \qquad (7.40)$$

unde:

$$\begin{aligned}w_1 &= h_1 - h_4 + h_5\\ w_2 &= -h_1 + h_6 + h_2\\ w_3 &= -h_2 + h_7 + h_3\\ w_4 &= -h_3 + h_4 - h_8\end{aligned} \qquad (7.41)$$

se numesc neînchideri nivelitice.

p_i – ponderile tronsoanelor de nivelment

Pentru nivelmentul geometric ponderea unui tronson este dată de inversul lungimii traseului :

$$p_i = \frac{1}{S_i}; \quad i = 1,2,\dots,8 \qquad (7.42)$$

Sistemul de corecţii obţinut este nedeterminat şi prin aplicarea condiţiei [pvv] = minim,poate fi transformat într-un sistem determinat , de forma:

$$\begin{aligned}\left[\frac{paa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{pab}{p}\right]k_2 + \left[\frac{pac}{p}\right]k_3 + \left[\frac{pad}{p}\right]k_4 + [W_1] = 0\\ \left[\frac{pbb}{p}\right]k_2 + \left[\frac{pbc}{p}\right]k_3 + \left[\frac{pbd}{p}\right]k_4 + [W_2] = 0\\ \left[\frac{pbc}{p}\right]k_3 + \left[\frac{pbd}{p}\right]k_4 + [W_3] = 0\\ \left[\frac{pbd}{p}\right]k_4 + [W_4] = 0\end{aligned} \qquad (7.43)$$

Coeficienţii ecuaţiilor normale se pot calcula conform consideraţiilor teoretice prezentate în §4.3.5, sau se pot exprima, în mod direct, în funcţie de lungimea traseelor de nivelment.

Pentru aceasta, se pleacă de la matricea coeficienţilor corespunzătoare sistemului ecuaţiilor de corecţii:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}a\\ b\\ c\\ d\end{matrix} \qquad (7.44)$$

în funcţie de care se culează:

$$\left[\frac{aa}{p}\right]=\frac{a_1a_1}{p_1}+\frac{a_2a_2}{p_2}+\frac{a_3a_3}{p_3}+...+\frac{a_8a_8}{p_8}=\frac{1}{\frac{1}{S_1}}+\frac{1}{\frac{1}{S_4}}+\frac{1}{\frac{1}{S_5}}=$$

$=S_1+S_4+S_5=S_I$ *– perimetru primului poligon*

$$\left[\frac{ab}{p}\right]=\frac{a_1b_1}{p_1}+\frac{a_2b_2}{p_2}+\frac{a_3b_3}{p_3}+...+\frac{a_8b_8}{p_8}=-S_1$$

$$\left[\frac{ac}{p}\right]=\frac{a_1c_1}{p_1}+\frac{a_2c_2}{p_2}+\frac{a_3c_3}{p_3}+...+\frac{a_8c_8}{p_8}=0$$

$$\left[\frac{ad}{p}\right]=\frac{a_1d_1}{p_1}+\frac{a_2d_2}{p_2}+\frac{a_3d_3}{p_3}+...+\frac{a_8d_8}{p_8}=-S_4$$

$$\left[\frac{bb}{p}\right]=\frac{b_1b_1}{p_1}+\frac{b_2b_2}{p_2}+\frac{b_3b_3}{p_3}+...+\frac{b_8b_8}{p_8}=\frac{1}{\frac{1}{S_1}}+\frac{1}{\frac{1}{S_2}}+\frac{1}{\frac{1}{S_6}}=$$

$=S_1+S_2+S_6=S_{II}$ *– perimetrul poligonului II*

$$\left[\frac{bc}{p}\right]=\frac{b_1c_1}{p_1}+\frac{b_2c_2}{p_2}+\frac{b_3c_3}{p_3}+...+\frac{b_8c_8}{p_8}=-S_2$$

$$\left[\frac{bd}{p}\right]=\frac{b_1d_1}{p_1}+\frac{b_2d_2}{p_2}+\frac{b_3d_3}{p_3}+...+\frac{b_8d_8}{p_8}=0$$

$$\left[\frac{cc}{p}\right]=\frac{c_1c_1}{p_1}+\frac{c_2c_2}{p_2}+\frac{c_3c_3}{p_3}+...+\frac{c_8c_8}{p_8}=\frac{1}{\frac{1}{S_2}}+\frac{1}{\frac{1}{S_3}}+\frac{1}{\frac{1}{S_7}}$$

$=S_2+S_3+S_7=S_{III}$ *– perimetrul poligonului III*

$$\left[\frac{cd}{p}\right]=\frac{c_1d_1}{p_1}+\frac{c_2d_2}{p_2}+\frac{c_3d_3}{p_3}+...+\frac{c_8d_8}{p_8}=-S_3$$

$$\left[\frac{dd}{p}\right]=\frac{d_1d_1}{p_1}+\frac{d_2d_2}{p_2}+\frac{d_3d_3}{p_3}+...+\frac{d_8d_8}{p_8}=\frac{1}{\frac{1}{S_3}}+\frac{1}{\frac{1}{S_4}}+\frac{1}{\frac{1}{S_8}}=$$

$=S_3+S_4+S_8=S_{IV}$ *– perimetru poligonului IV*

(7.45)

$\left[\frac{pab}{p}\right]=-$ S_1 secțiunea comună poligoanelor I-II

$\left[\frac{pac}{p}\right]=0$ secțiunea comună poligoanelor I-III

$\left[\frac{pad}{p}\right]=-$ S4 secțiunea comună poligoanelor I-IV

ş.a.m.d.

Cu aceşti coeficienți sistemul ecuațiilor normale are o formă simplă şi poate fi scris direct după schița traseelor, respectiv:

$$S^{I}k_1 - S_1k_2 - 0k_3 - S_4k_4 + w_1 = 0$$
$$-S_1k_1 + S^{II}k_2 - S_2k_3 - 0k_4 + w_2 = 0$$

$$\begin{aligned} 0k_1 - S_2k_2 + S^{III}k_3 - S_3k_4 + w_3 &= 0 \\ - S_4k_1 - 0k_2 - S_3k_3 + S^{IV}k_4 + w_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (7.46)$$

Rezolvând acest sistem obținem corelatele k_1, k_2, k_3, k_4, cu ajutorul cărora determinăm corecțiile, folosind relațiile:

$$v_i = \frac{1}{p_i}(a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + d_i k_4); i = 1,2,...,8 \quad (7.47)$$

Ținând seama de valoarea coeficienților ecuațiilor de corecții se obține:

$$\begin{aligned} v_1 &= S_1(k_1 - k_2) \\ v_2 &= S_2(k_2 - k_3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_8 &= S_8(-k_4). \end{aligned} \qquad (7.48)$$

Corecțiile diferențelor de nivel date de (7.48) pot fi scrise direct folosind următoarele reguli:

- corecția unei diferențe de nivel măsurată pe o secțiune interioară rețelei, este dată de lungimea secțiunii înmulțită cu diferența dintre corelatele poligoanelor adiacente (sensul diferenței coincide cu sensul general de scriere a condițiilor);
- corecția unei diferențe de nivel măsurată pe o secțiune de contur a rețelei este dată de lungimea secțiunii înmulțită cu corelata poligonului din care face parte secțiunea.

Diferențele de nivel compensate se obțin după relația:

$$(h_i) = h_i + v_i \quad , i = 1, 2, ..., 8 \qquad (7.49)$$

Eroarea medie pătratică a unității de ponderi se calculează cu formula:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} \qquad (7.50)$$

unde:

r- nr. ecuațiilor de condiție

După obținerea diferenței de nivel compensate se calculează cotele punctelor nodale (pornind de la un punct de cotă cunoscută, sau luat arbitrar) și apoi cotele punctelor de pe secțiuni.

Compensarea rețelelor de nivelment va fi tratată și pentru cazul rețelelor de nivelment dependente , rețele care conțin două sau mai multe puncte de cote cunoscute.

Fie spre exemplu rețeaua nivelitică formată din 4 poligoane închise și 2 puncte „A", „B" ale căror cote sunt cunoscute (fig.7.6.).Acest caz corespunde rețelelor nivelitice de ord II și III. Dacă traseul de nivelment ce se sprijină pe punctele date „A", „B" se consideră închis după traseul imaginar reprezentat punctat formând poligonul „V", atunci ecuațiile de corecții se prezintă sub forma:

$$\begin{aligned} v_{12} + v_{23} - v_{13} + w_1 &= 0 \\ -v_{23} + v_{2A} + v_{A4} + v_{43} + w_2 &= 0 \\ -v_{34} - v_{4B} - v_{B5} + v_{53} + w_3 &= 0 \\ v_{13} - v_{53} - v_{15} + w_4 &= 0 \\ v_{B4} - v_{4A} + w_5 &= 0 \end{aligned} \qquad (7.51)$$

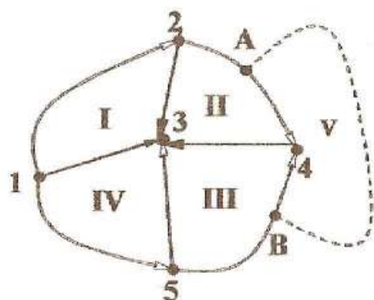


Fig. 7.6.Rețea dependentă de nivelment

Conform figurii se poate scrie direct sistemul ecuațiilor normale:

$$
\begin{aligned}
&S^{I}K_1 - S_{23}K_2 - 0K_3 - S_{13}K_4 - 0K_5 + w_1 = 0\\
&-S_{23}K_1 + S^{II}K_2 - S_{34}K_3 - 0K_4 - S_{A4}K_5 + w_2 = 0\\
&0K_1 - S_{34}K_2 + S^{III}K_3 - S_{53}K_4 - S_{4B}K_5 + w_3 = 0 \quad (7.52)\\
&-S_{13}K_1 - 0K_2 - S_{53}K_3 + S^{IV}K_4 - S_{4B}K_5 + w_4 = 0\\
&-0K_1 - S_{A4}K_2 - S_{4B}K_3 - 0K_4 + S^{V}K_5 + w_5 = 0
\end{aligned}
$$

unde lungimea poligonului fictiv „V" este:

$$S^{V} = S_{4A} + S_{B4} \quad \text{si} \quad w_5 = H_B - H_A + h_{B4} - h_{4A} \quad (7.53)$$

Din relația (7.52) se observă că sistemul ecuațiilor normale poate fi scris direct de pe schița rețelei. Indiferent de configurația sa, fiecărui poligon

(real sau fictiv) îi corespunde o ecuație normală constituită din:

- coeficientul corelatei de pe diagonala principală, căruia îi corespunde lungimea (în km) a perimetrului poligonului considerat;
- coeficienții corelatelor poligoanelor adiacente, care sunt egali cu lungimea laturilor adiacente, luați cu semn schimbat;
- corelatele poligoanelor adiacente, reale sau fictive;
- termenul liber, egal cu neînchiderea în poligon.

In afară de metodele prezentate, compensarea rețelelor de nivelment geometric de ordinul III și IV se poate realiza prin ***metoda aproximațiilor succesive.***

In principiu, metoda constă în exprimarea corelatelor poligoanelor(k_i) în funcție de neînchiderea diferențelor de nivel (w_i), raportate la perimetrele poligoanelor S^i plus corecțiile k_i'.

Prin introducerea acestor expresii în sistemul inițial al corelatelor se obține un nou sistem normal de corelete k_i' cu neînchiderile w_i'.După care se exprimă k_i' în funcție de w_i' raportate la perimetrele poligoanelor S^i plus corecțiile k_i'', s.a.m.d., operațiunile se repetă până când neînchiderile diferențelor de nivel pe poligoane tind spre zero.Prezentarea în detaliu a metodei se regăsește în [7].

7.2.3. Compensarea rețelelor de nivelment prin metoda măsurătorilor indirecte

O rețea de nivelment geometric este alcătuită din reperele de nivelment între care se efectuează măsurători în vederea determinării diferențelor de nivel și a lungimii traseelor pe care se efectuează observațiile.

Pentru a se efectua calculele de compensare, trebuie să se cunoscă sau să se determine:

- Diferențele de nivel măsurate Δh_{ij} prin metoda nivelmentului geometric și reduse unitar la unul din sistemele de altitudini cunoscut (funcție de cerințele lucrării);

- Lungimile traseelor urmate pentru determinarea diferențelor de nivel se determină concomitent cu efectuarea observațiilor și ele sunt necesare pentru determinarea ponderilor măsurătorilor. Pentru unele rețele poate fi considerat ca element de calcul al ponderii numărul stațiilor efectuate pentru determinarea diferenței de nivel dintre două repere;

- Altitudinea (H_i) a unuia sau a mai multor repere de nivelment din rețeaua considerată;

- Informații cu privire la matricea ponderilor observațiilor necesare la construirea modelului funcțional-stochastic .

Pentru o prelucrare prin metoda observațiilor indirecte este necesar ca numărul măsurătorilor să fie mai mare decât numărul necunoscutelor implicate în model.

Această metodă de compensare mai poartă numele de metoda nodurilor deoarece ecuațiile corecțiilor se scriu în jurul fiecărui punct nou, denumit și nod. Metoda se utilizează, în general, la nivelmentul de ord. III și IV. Se tratează analog cu metoda planimetrică a variației coordonatelor și s-ar putea numi ca atare și metoda variației altitudinilor.

Pentru prelucrare se vor deduce corecții pentru măsurători și respectiv pentru altitudinile provizorii:

$$(\Delta h_{ij}) = \Delta h_{ij}^0 + v_{ij}$$
$$(H_i) = H_i^0 + dx_i \qquad (7.54)$$

Ecuațiile corecțiilor au forme diferite în funcție de tipul punctelor între care se scriu și anume:

- între două puncte vechi nu se execută o nouă măsurătoare directă, fără puncte intermediare Aceasta se observă și pe figura 7.6. de care se va ține seama la deducerea formulelor folosite în prelucrare.
- între un punct vechi „A" și un punct nou „1" se poate scrie:

$$H_A + \Delta h_{A1}^0 + v_{A1} = H_1^0 + dx_1 \qquad (7.55)$$

de unde rezultă:

$$v_{A1} = dx_1 + \underbrace{H_1^0 - (H_A + \Delta h_{A1}^0)}_{l_{A1}} = dx_1 + l_{A1} \qquad (7.56)$$

- Intre două puncte noi:

$$H_1^0 + dx_1 + \Delta h_{12}^0 + v_{12} = H_2^0 + dx_2 \qquad (7.57)$$

de unde rezultă:

$$v_{12} = -dx_1 + dx_2 + \underbrace{H_2^0 - (H_1^0 + \Delta h_{12}^0)}_{l_{12}} = -dx_1 + dx_2 + l_{12} \quad (7.58)$$

Considerând rețeaua neconstrânsă din figura 7.5., în care se cunoaște cota punctului „A", se măsoară diferențele de nivel între puncte, pe baza cărora se determină cotele provizorii ale punctelor nodale 1,2,3 și 4.

Pentru scrierea ecuațiilor de corecții se introduc notațiile:

- (H_1), (H_2), (H_3),(H_4) – cotele cele mai probabile ale punctelor nodale;
- $H_1^0, H_2^0, H_3^0, H_4^0$ - cotele aproximative ale punctelor nodale;
- dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 – corecțiile probabile ale cotelor aproximative;
- h_1, h_1,... h_8 – diferențele de nivel măsurate.

Conform acestor notații se poate scrie:

$$\begin{aligned} (H_1) &= H_1^0 + dx_1 \\ (H_2) &= H_2^0 + dx_2 \\ &\dots\dots\dots \\ (H_4) &= H_4^0 + dx_4 \end{aligned} \quad (7.59)$$

Cotele provizorii se obțin pornind de la cota cunoscută a punctului „A", adunând algebric (în funcție se sensul de creștere a declivității), pe diferite trasee, diferențele de nivel măsurate.

$$\begin{aligned} H_1^0 &= H_A + h_5 \\ H_2^0 &= H_1^0 + h_6 \\ &\dots\dots\dots \\ H_4^0 &= H_A + h_4 \end{aligned} \quad (7.60)$$

Ecuațiile corecțiilor se pot stabili cu ușurință, direct de pe figură, în jurul fiecărui nod, ținând seama de ecuațiile stabilite anterior, și de faptul că pentru fiecare diferență de nivel măsurată între nodurle existente se va scrie o ecuație de corecții.

Ecuațiile corecțiilor pentru rețeaua de nivelment neconstrânsă (fig 7.5) se prezentată sub forma:

$$\begin{array}{llllll} v_{A1} = +dx_1 & & & & +l_{A1}, & p_{A1} \\ v_{12} = -dx_1 & +dx_2 & & & +l_{12}, & p_{12} \\ v_{14} = -dx_1 & & & +dx_4 & +l_{14}, & p_{14} \\ v_{23} = & -dx_2 & +dx_3 & & +l_{23}, & p_{23} \\ v_{24} = & -dx_2 & & +dx_4 & +l_{24}, & p_{24} \\ v_{34} = & & -dx_3 & +dx_4 & +l_{34}, & p_{34} \\ v_{A4} = & & & +dx_4 & +l_{A4}, & p_{A4} \\ v_{A3} = & & +dx_3 & & +l_{A3}, & p_{43} \end{array} \quad (7.61)$$

în care:

$$\begin{aligned} l_{A1} &= H_1^0 + h_{A1} - H_A \\ l_{12} &= H_2^0 + h_{12} - H_1^0 \\ &\dots\dots\dots \\ l_{A3} &= H_3^0 + h_{A3} - H_A \end{aligned} \quad (7.62)$$

Sistemul de erori se rezolvă după metoda măsurătorilor indirecte de precizii diferite, punând condiția [pvv] = minim. Se obține sistemul ecuațiilor normale:

$$
\begin{aligned}
&[paa]dx_1 + [pab]dx_2 + [pac]dx_3 + [pad]dx_4 + [pal] = 0\\
&[pba]dx_1 + [pbb]dx_2 + [pbc]dx_3 + [pbd]dx_4 + [pbl] = 0\\
&[pca]dx_1 + [pcb]dx_2 + [pcc]dx_3 + [pcd]dx_4 + [pcl] = 0\\
&[pda]dx_1 + [pdb]dx_2 + [pdc]dx_3 + [pdd]dx_4 + [pdl] = 0
\end{aligned}
\tag{7.63}
$$

Coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi se obţin conform metodologiei prezentată în §4.3.3.

O scriere directă a ecuaţiilor normale se realizează în funcţie de ponderile ecuaţiilor, astfel, pentru prima ecuaţie normală se poate sctie:

$$
\begin{aligned}
&\overbrace{(p_{A1} + p_{12} + p_{13})}^{P_1}\, dx_1 - p_{12}\, dx_2 - p_{13} dx_3 + \\
&+ \overbrace{(p_{A1}\, l_{A1} - p_{12}\, l_{12} - p_{13}\, l_{13})}^{L_1} = 0
\end{aligned}
\tag{7.64}
$$

Se observă că sistemul ecuaţiilor normale poate fi format de pe schiţa reţelei, indiferent de complexitatea sa, fiecărui punct nou corespunzându-i o ecuaţie normală constituită din următorii termeni:

- coeficientul necunoscutei de pe diagonala principală „P_i", corespunzător nodului „i", pentru care se scrie ecuaţia, este egal cu suma ponderilor liniilor care converg în nodul menţionat ;
- în ecuaţie mai intervin necunoscutele corespunzătoare nodurilor cu care punctul „i" este în legătură cu coeficienţii respectivi egali cu $-p_{ij}$;
- termenul liber , notat în continuare cu „E", este format dintr-o sumă de produse, între ponderi şi termenii liberi ai ecuaţiilor de erori scrise pentru punctul „i", în care semnul plus se ia pentru liniile care intră în punct ,iar semnul minus pentru liniile care pleacă din punct.

In acest fel ecuaţia normală , pentru reţeaua considerată se prezintă sub forma:

$$
\begin{aligned}
P_1\, dx_1 - p_{12}\, dx_2 - p_{13}\, dx_3 \qquad\qquad + L_1 &= 0\\
-p_{12}\, dx_1 + P_2\, dx_2 - p_{23}\, dx_3 - p_{24} dx_4 + L_2 &= 0\\
-p_{13}\, dx_1 - p_{23}\, dx_2 + P_3\, dx_3 \qquad\qquad + L_3 &= 0\\
- p_{24}\, dx_2 \qquad\qquad + P_4\, dx_4 + L_4 &= 0
\end{aligned}
\tag{7.65}
$$

Prin rezolvarea sistemului cu una din metodele cunoscute de la teoria de prelucrare a mărimilor geodezice, se obţin corecţiile : $dx_1, dx_2,.. dx_4$, cu ajutorul cărora se calculează valorile probabile ale cotelor:

$$
\begin{aligned}
(H_1) &= H_1 + dx_1\\
(H_2) &= H_2 + dx_2\\
\\
(H_4) &= H_4 + dx_4
\end{aligned}
\tag{7.66}
$$

Eroarea medie pătratică se calculează cu formula:

$$
m_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}} \tag{7.67}
$$

în care:

n – numărul ecuaţiilor de erori (în cazul exemplului considerat n= 8);

k – numărul de necunoscute ce se calculează (în cazul exemplului considerat k=4).

7.3.Nivelmentul trigonometric geodezic

Nivelmentul trigonometric se utilizează la determinarea altitudinii punctelor reţelelor geodezice, în reţele geodezice tridimensionale pentru determinarea altitudinilor elipsoidale şi în Geodezia fizică pentru determinarea deviaţiei verticalei şi a ondulaţiei geoidului.

Problema principală la determinarea altitudinilor prin nivelment trigonometric o constituie efectul refracţiei atmosferice verticale şi a sfericităţii. Refracţia verticală influenţează valoarea unghiurilor zenitale măsurate şi implicit şi a diferenţelor de nivel determinate.De asemenea, sfericitatea influenţează diferenţele de nivel, determinate între două puncte.

De la cursul de Topografie se cunoaşte că valoarea corecţiei totale de sfericitate şi refracţie se calculează cu relaţia:

$$C = \frac{(1-k)}{2R} D^2 \tag{7.68}$$

unde:

k- coeficientul de refracţie ($k=0 \div 0.26$, pentru latitudinea $B=0^0 \div 90^0$);

R- raza medie de curbură a secţiunilor eliptice ce trec prin punctele „P_i" şi „P_j":

$$R_m = \frac{R_i + R_j}{2} \tag{7.69}$$

Valoarea celor două raze de curbură se calculează cu relaţia:

$$R_i = \frac{M_i N_i}{N_i \cos^2 A_{ij} + M_i \sin^2 A_{ij}} \tag{7.70}$$

unde:

A_{ij} - azimutul secţiunii normale ;

M_i şi „N_i- razele principale de curbură ale elipsoidului de referinţă.

La studierea fenomenului de refracţie. de multe ori, suprafaţa geoidului se înlocuieşte cu suprafaţa sferei medii Gauss de rază $R = \sqrt{MN}$, fără introducerea unor erori superioare celor generate de acceptarea altor aproximaţii.

7.3.1.Refracţia atmosferică verticală

Dacă se consideră punctele „P_i" şi „P_j" în care s-au efectuat observaţii unghiulare verticale, care au fost corectate cu componentele deviaţiei verticale pe direcţia celor două puncte (v.§1.11.3.), datorită fenomenului refracţiei atmosferice verticale se măsoară distanţele zenitale ζ_{ij}^0 *si* ζ_{ji}^0 în locul valorilor reale ζ_{ij} *si* ζ_{ji} (fig.7.7). Conform figurii se poate scrie:

$$\zeta_{ij} = \zeta_{ij}^0 + \rho_{ij}; \quad \zeta_{ji} = \zeta_{ji}^0 + \rho_{ji} \tag{7.71}$$

unde:

ρ_{ij} si ρ_{ji} - unghiurile de refracție între cele două puncte

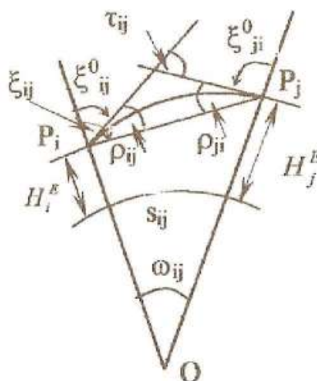


Fig.7.7. Refracția terestră verticală

Unghiul „τ" format de tangentele din punctele „P_i" și „P_j" se numește ***unghiul refracției totale*** a cărui expresie de calcul este dată de relația:

$$\tau_{ij} = 200 - [200 - (\rho_{ij} + \rho_{ji})] = \rho_{ij} + \rho_{ji} \qquad (7.72)$$

Notând cu „Γ"curbura variabilă a razei de lumină , refracția totală poate fi determinată teoretic cu relația:

$$\tau_{ij} = \int_{P_i}^{P_j} \Gamma ds \qquad (7.73)$$

unde:

ds- elementul de arc al arcului $\overset{\frown}{P_iP_j}$.

Relația (7.3) este numai teoretic aplicabilă, pentru că aceasta ar necesita măsurători de temperatură și presiune din punct în punct , în lungul razei de lumină, care, evident sunt posibile numai teoretic.

In practică, având în vedere că lungimea vizelor la nivelmentul trigonometric este de până la 7km, se acceptă o valoare constantă a curburii razei de lumină, ceea ce înseamnă că arcul de curbură dintre cele două puncte poate fi aproximat cu un arc de cerc .In baza acestei aproximări se poate scrie:

$$\rho_{ij} = \rho_{ji} = \rho = \frac{\tau_{ij}}{2} \qquad (7.74)$$

De asemenea, ca urmare a aproximării acceptate , raza de curbură devine constantă. In urma integrării relației (7.3) rezultă:

$$\tau_{ij} = \Gamma \overset{\frown}{P_iP_j} \qquad (7.75)$$

O altă aproximație acceptată este aceea de a înlocui lungimea arcului din relația de mai sus ,cu distanța de pe elipsoidul de referință „s_{ij}".

Asimilând elipsoidul cu sfera de rază medie Gauss se poate înlocui lungimea arcului de cerc cu raza medie deînmulțită cu unghiul la centru și astfel relația (7.5) devine:

$$\tau_{ij} = \Gamma R_m \omega_{ij} = \frac{1}{R_r} R_m \omega_{ij} = k\omega_{ij} \qquad (7.76)$$

unde:

R_m – valoarea medie a razelor de curbură în cele două puncte între care se determină diferența de nivel;

R_r – raza de curbură a razei de lumină după care se fac observațiile zenitale.

k - coeficient de proporționalitate denumit și ***coeficient de refracție:***

$$k = \frac{R_m}{R_r} \tag{7.77}$$

Din relațiile (7.74) și (7.76) rezultă expresia de calcul a valorii unghiului de refracție:

$$\rho = k\frac{\omega_{ij}}{2} \tag{7.78}$$

Din triunghiul OP_iP_j (fig.7.7) se poate deduce că:

$$\begin{aligned}200-(\zeta_{ij}^0+\rho_{ij}) &= 200-[\omega_{ij}+(200-(\zeta_{ji}^0+\rho_{ji})] = \\ &= -\omega_{ij}+(\zeta_{ji}^0+\rho_{ji})\end{aligned} \tag{7.79}$$

sau:

$$(\zeta_{ij}^0+\rho_{ij}) = 200+\omega_{ij}-(\zeta_{ji}^0+\rho_{ji}) \tag{7.80}$$

sau:

$$\underbrace{\rho_{ij}+\rho_{ji}}_{\tau_{ij}} = 200+\omega_{ij}-(\zeta_{ij}^0+\zeta_{ji}^0) \tag{7.81}$$

Inlocuind valoarea expresiei (7.81) în relația (7. 76) și efectuând calculele se obține coeficientul de refracție „k":

$$k-1 = \frac{200-(\zeta_{ij}^0+\zeta_{ji}^0)}{\omega_{ij}} \tag{7.82}$$

Refracția atmosferică este o funcție periodică, dependentă de mai mulți factori, dintre care cel mai important este temperatura atmosferei. Acest factor face ca ***refracția atmosferică terestră să fie o consecință directă a încălzirii solului.***

In variația diurnă (24 ore) a refracției verticale se remarcă o caracteristică de stabilitate ***între orele 10 și 15, perioadă în care se recomandă să se execute măsurătirile geodezice zenitale.***

Pentru lucrările curente se acceptă coeficientul de refracție(calculat de Gauss) k=013, valoare utilizată și în stațiile totale pentru calculul corecțiilor fizice, iar pentru țara noastră coeficientul adoptat este k =0.14.

Pentru a diminua efectul refracției atmosferice este indicat, să se măsoare ambele distanțe zenitale, pe cât posibil simultan (observații zenitale reciproce și simultne)

7.3.2.Nivelmentul trigonometric geodezic reciproc și simultan

Pentru a stabili relația de calcul a diferenței de nivel dintre punctele „P_i" și „P_j", trebuie luat în considerare sistemul de altitudini în care va fi utilizată diferența.

In cazul sistemelor de altitudini ce au ca suprafața de referință geoidul, nu este necesară aplicarea corecțiilor de reducere a observațiilor zenitale la normala la elipsoid, iar în cazul altitudinilor elipsoidale se aplică aceste corecții.

Cu aceste precizări şi într-un caz şi în altul se parcurg etapele:

- se măsoară unghiurile zenitale ζ_i^0 *si* ζ_j^0;
- se determină distanţa dintre punctele P_i şi P_j , din coordonate;
- se acceptă urmatoarele ipoteze simplificatoare:
  - se consideră observaţiile executate la sol (I_i=S_i=I_j=S_j), urmând ca acestea să se introducă în formulele finale;
  - se neglijează ondulaţiile geoidului şi deviaţiile de la verticală a normalei la elipsoid;
  - se asimilează distanţa calculată din coordonate cu distanţa redusă la geoid.

Pentru a calcula diferenţa de nivel dintre pinctele „P_i" şi „P_j", în triunghiul P_iP_jO (fig 7.8.) se poate aplica teorema sinusului sau a tangentei.Prin aplicarea teoremei tangentei se obţine:

$$tg\frac{A-B}{2}tg\frac{C}{3}=\frac{a-b}{a+b} \qquad (7.83)$$

Asimilând triunghiul P_iP_jO cu triunghiul ABC, se pot face , în continuare, asimilările:

$$\begin{aligned} A &= 200^g-(\zeta_{ij}+\rho_{ij}) \\ B &= 200^g-(\zeta_{ji}+\rho_{ji}) \\ C &= \omega_{ij} \\ a &= R+H_j \ si \ b=R+H_i \end{aligned} \qquad (7.84)$$

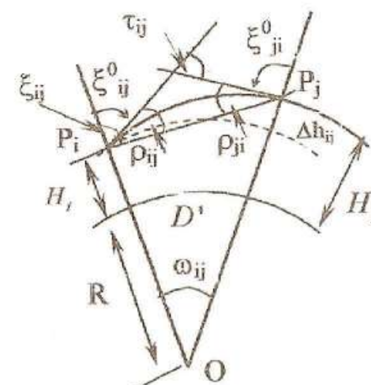


Fig.7.8. Nivelmentul trigonometric

Inlocuind (7.84) în (7.83) se obţine:

$$tg\frac{\zeta_{ji}-\zeta_{ij}}{2}tg\frac{\omega_{ij}}{2}=\frac{H_B-H_A}{2R+H_A+H_B} \qquad (7.85)$$

de unde rezultă:

$$H_j-H_i=\Delta h_{ij}=(2R+H_i+H_j)tg\frac{\zeta_{ji}-\zeta_{ij}}{2}tg\frac{\omega_{ij}}{2} \qquad (7.86)$$

Deoarece „ω_{ij}" este un unghi mic (pentru lungimea laturilor de triangulaţie de 30 km, ω_{ij}<30^c), se poate asimila valoarea funcţiei cu valoarea argumentului:

$$tg\frac{\omega_{ij}}{2}\approx\frac{\omega_{ij}}{2} \qquad (7.87)$$

Datorită asimilării geoidului cu sfera de rază medie Gauss se poate scrie:

$$\omega_{ij} = \frac{D'}{R} \tag{7.88}$$

Inlocuind relațiile (7.87) și (7.88) în (7.86) se obține următoarea relație de calcul:

$$\Delta h_{ij} = D'(1+\frac{H_m^0}{R})tg\frac{\zeta_{ji}-\zeta_{ij}}{2} \tag{7.89}$$

în care :

$$H_m^0 = \frac{H_i^0 + H_j^0}{2} \tag{7.90}$$

unde: H_i^0 *si* H_j^0 sunt altitudinile aproximative ale celor două puncte determinate de pe hartă.

Dacă se ia în considerare înălțimile instrumentelor din cele două puncte (I_i, I_j) și înălțimile semnalelor (S_i, S_j) diferența de nivel trebuie corectată cu:

- (I_i-S_j) pentru punctul „P_i", (pentru a determina Δh_{ij});
- (I_j-S_i) pentru punctul „P_j", (pentru a determina Δh_{ji});

întrucât Δh_{ij}=- Δh_{ji} media celor două corecții va fi:

$$\frac{I_i - I_j}{2} + \frac{S_i - S_j}{2} \tag{7.91}$$

Cu aceasta diferența de nivel trigonometric reciproc și simultan este dată de relația:

$$\Delta h_{ij} = D'(1+\frac{H_m^0}{R})tg\frac{\zeta_{ji}-\zeta_{ij}}{2} + \frac{I_i - I_j}{2} + \frac{S_i - S_j}{2} \tag{7.92}$$

7.3.3.Nivelmentul trigonometric geodezic unilateral

In practică , de regulă, se fac numai observații unghiulare verticale unilaterale, situații când refracția atmosferică are o contribuție semnificativă, fapt pentru care se va ține seama de aceasta.

Dacă din relația (7.80) se extrage valoarea pentru distanța zenitală „ζ_{ji}" se obține:

$$\zeta_{ji}^0 = 200 - (\zeta_{ij}^0 + 2\rho - \omega_{ij}) \tag{7.93}$$

Prin introducerea rel. (7.93): în (7.89) și ținând seama de rel. (7.81), (7.82) se obține:

$$\begin{aligned}\Delta h_{ij} &= \frac{200^g - \zeta_{ij}^0 - 2\rho + \omega_{ij} - \zeta_{ij}}{2} = \\ &= D'(1+\frac{H_m^0}{R})tg\frac{200^g - 2\zeta_{ij}^0 - 2\rho + \omega_{ij})}{2} = \\ &= D'(1+\frac{H_m^0}{R})tg\frac{200^g - (2\zeta_{ij}^0 - \overbrace{[200^g - (\zeta_{ij}^0 + \zeta_{ji}^0) + \omega_{ij}]}^{(k-1)\omega_{ij}} + \omega_{ij})}{2} = \\ &= D'(1+\frac{H_m^0}{R})tg[100 - (\zeta_{ij}^0 + \frac{k-1}{2}\omega_{ij})] = \\ &= D'(1+\frac{H_m^0}{R})ctg(\zeta_{ij}^0 - \frac{1-k}{2}\omega_{ij})\end{aligned} \tag{7.94}$$

Dacă se dezvoltă în serie Taylor cotangenta din relația de mai sus se poate scrie:

$$ctg(\zeta_{ij}^{0}-\frac{1-k}{2}\omega_{ij})=ctg\zeta_{ij}^{0}+\frac{1-k}{2}\frac{\omega_{ij}}{\sin^{2}\zeta_{ij}^{0}} \qquad (7.95)$$

In rel. (7.95) se înlocuieşte „ω_{ij}" cu D'/R, şi astfel, formula de calcul a diferenţei de nivel, în cazul nivelmentului trigonometric unilateral se prezintă sub forma:

$$\Delta h_{ij}=D'(1+\frac{H_m^0}{R})ctg\zeta_{ij}^{0}+\frac{1-k}{2R\sin^{2}\zeta_{ij}}D'^{2}+I_i-S_j \qquad (7.96)$$

7.3.4Metode de realizare a nivelmentului trigonometric

In cazul nivelmentului trigonometric unilateral se aplică:

- metoda intersecţiei înainte;
- metoda intersecţiei înapoi;
- metoda drumuirii de nivelment geodezic etc.

Metoda intersecţiei înainte –constă în măsurarea distanţlor zenitale (unghiurilor zenitale) de la punctele cunoscute spre punctul a cărui cotă dorim să o determinăm.

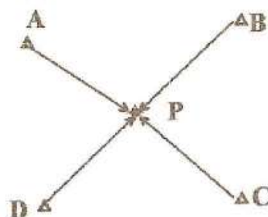


Fig.7.9 Metoda intersecţiei înainte

Considerând cunoscute cotele punctelor A,B,C,D, (fig.7.9.) se determină diferenţele de nivel spre punctul „P" cu relaţia (7.96.). Cota punctului „P" se determină cu relaţia:

$$H_P^i=H_i+\Delta h_{iP};\quad i=A,B,C,D \qquad (7.97)$$

Valoarea cea mai probabilă a cotei punctului nou se determină cu relaţia:

$$(H_P)=\frac{P_A H_P^A+P_B H_P^B+P_C H_P^C+P_D H_P^D}{P_A+P_B+P_C+P_D} \qquad (7.98)$$

în care:

P_A, P_B, P_C, P_D – ponderile cotelor,care se determină cu relaţiile:

$$P_i=\frac{1}{D_{iP}^2};\quad i=A,B,C,D \qquad (7.99)$$

$H_P^i; i=A,B,C,D$ - cota punctului „P" determinate din punctele vechi.

Metoda intersecţiei înapoi – constă în măsurarea unghiurilor zenitale (distanţelor zenitale) $\zeta_P^i; i=D,B,C,D$, în punctul a cărei cotă dorim să o determinăm spre punctele de cotă cunoscută. Pe baza observaţiilor efectuate se calculează diferenţele de nivel cu rel.(7.96) şi apoi cota punctului „P":

$$H_P^i=H_i-\Delta h_{Pi};\quad i=A,B,C,D \qquad (7.100)$$

Cota ce mai probabilă a punctului „P" se determină ca şi în cazul intersecţiei înainte (rel.7.98.).

Drumuirea de nivelment geodezic – este formată dintr-un traseu de nivelment unilateral sprijinit la capete pe puncte de cote cunoscute (H_A şi H_B), traseu care trece prin punctele reţelei de triangulaţie a căror cote dorim să le determinăm. Diferenţele de nivel dintre puncte se calculează cu relaţii de forma (7.96), iar neînchiderea pe cote se stabileşte cu:

$$W_h = [\Delta h_{ij}]_A^B - (H_B - H_A) < T \qquad (7.101)$$

unde:

$$T = 0.20\sqrt{[d_{ij}]_A^B} \quad [m] \qquad (7.102)$$

în care : distanţele se exprimă în „km", iar toleranţa în „m",

Corecţia de neînchidere unitară se calculează cu relaţia:

$$C_h^0 = -\frac{W_h}{[d_{ij}]_A^B} \qquad (7.103)$$

Eroarea de neînchidere pe cote se repartizează diferenţelor de nivel măsurate, proporţional cu distanţele dintre puncte denmulţite cu eroarea unitară, luată cu semn schimbat:

$$(\Delta h_{ij}) = \Delta h_{ij} + d_{ij}C_h^0 \qquad (7.104)$$

unde:

(Δh_{ij}) - diferenţele de nivel compensate;

Δh_{ij} - diferenţele de nivel măsurate;

C_h^0 - corecţia unitară ;

d_{ij} – distanţele aferente diferenţelor de nivel măsurate.

Cu diferenţele de nivel compensate se calculează cotele

definitive ale punctelor:

$$H_j = H_A + [(\Delta h_{ij})]_A^j \qquad (7.105)$$

Cu referire la precizia cotelor, obţinute prin nivelment trigonometric, trebuie reamintit că, datorită ipotezelor simplificatoare introduse în modelul funcţional stochastic, aceasta este mai mică decât în cazul nivelmentului geometric geodezic.

Metoda nivelmentului trigonometric geodezic este indicată în cazul determinării cotelor reţelelor de triangulaţie în regiunile de deal şi munte.

ANEXE

RELATII MATEMATICE UTILIZATE FRECVENT IN GEODEZIE

I. Serii

Seriile au o mare importanță în calculele geodezice. Cu ajutorul lor, multe formule complexe se reduc la forme simple ce pot fi utilizate cu ușurință în calcule .

Formulele inițiale pentru dezvoltarea în serie sunt:

Seria Taylor

$$f(x)=f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots \quad (I.1)$$

Seria Mac-Laurin

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots \quad (I.2)$$

în care: $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$... sunt valorile funcțiilor $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$... pentru cazul x=0.

Formulele (I.1) și (I.2) pot fi folosite cu condiția ca funcția f(x) și toate derivatele succesive să fie finite și continue pentru toate valorile variabile în intervalul discutat.

Folosind formulele Mac – Laurin și Taylor obținem următoarele serii particulare care sunt folosite pe larg în geodezia superioară:

Serii trigonometrice

$$sin(x_0+h)=sin\,x_0+h\cos x_0-\frac{h^2}{2}sin\,x_0-\frac{h^3}{6}cos\,x_0+\ldots$$

$$cos(x_0+h)=cos\,x_0-h\,sin\,x_0-\frac{h^2}{2}cos\,x_0+\frac{h^3}{6}sin\,x_0+\ldots$$

$$tg(x_0+h)=tgx_0+h\frac{1}{cos^2 x_0}+h^2\frac{sin\,x_0}{cos^3 x_0}+\frac{h^3}{3}\frac{cos^2 x_0+3\,sin^2 x_0}{cos^4 x_0}+\ldots$$

$$ctg(x_0+h)=ctgx_0-h\frac{1}{sin^2 x_0}+h^2\frac{cos\,x_0}{sin^3 x_0}-\frac{h^3}{3}\frac{sin^2 x_0+3\,cos^2 x_0}{sin^4 x_0}+\ldots \quad (I.3)$$

Funcțiile trigonometrice ale unghiurilor mici

Dacă argumentul x este exprimat în fracțiuni de rază, atunci:

$$sin\,x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots$$

$$cos\,x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots$$

$$tgx=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots$$

$$ctgx = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{5} - \frac{2x^5}{945} - \dots \qquad (I.4)$$

$$sec\,x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \dots$$

$$cosec\,x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \dots$$

Dacă x este exprimat în secunde de arc, atunci avem:

$$sin\,x'' = \frac{x''}{\rho''} - \frac{x''^3}{6\rho''^3} + \frac{x''^5}{120\rho''^5} - \dots$$

$$cos\,x'' = 1 - \frac{x''}{2\rho''^2} + \frac{x''^4}{24\rho''^4} - \dots \qquad (I.5)$$

$$tgx'' = \frac{x''}{\rho''} + \frac{x''^3}{3\rho''^3} + \frac{2x''^5}{15\rho''^5} + \dots$$

Descompunerea binomului $(1+x)^m$ ($|x|<1$)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}x^n \qquad (I.6)$$

Dând lui "*m*" diferite valori, obținem:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots \qquad (I.7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \dots$$

Seriile logaritmice ($|x|<1$)

$$ln(1\pm x) = \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \pm \dots$$

$$log(1\pm x) = \mu\,ln(1\pm x) = \pm\mu x - \frac{\mu}{2}x^2 \pm \frac{\mu}{3}x^3 - \frac{\mu}{4}x^4 \pm \dots \qquad (I.8)$$

Diferențiala unei funcții de mai multe variabile scalare

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i \qquad (1.9)$$

unde:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ - derivatele parțiale ale funcției f{$x_1, x_2, \dots, x_n$);

dx_i, - diferențialele mărimilor scalare

In cazul când argumentele funcției sunt funcții de alte variabile independente $f(x_1(t), x_2(t)\ldots x_n(t))$, atunci se poate definii derivata totală a funcției "f":

$$\frac{df}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \qquad (I.10)$$

In caz particular, pentru $z=f(x, y(x))$ se obține:

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad (1.11)$$

Operatorii diferențiali:

Operatorul Hamilton (operatorul gradient):

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, i=1,2\ldots n\right) \qquad (1.12)$$

Operatorul Laplace:

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\ldots,\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad (1.13)$$

II. Formule din trigonometria sferică

A. Formule de bază ale trigonometriei sferice

Notații:

A, B, C - unghiurile triunghiului sferic ABC din fig.II.1

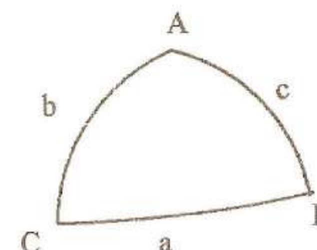


Fig.II.1 Triunghi sferic

a, b, c - laturile triunghiului sferic ABC opuse unghiurilor A, B, C şi exprimate în valori unghiulare.

1. *Formula sinusurilor.*- laturile triunghiurilor sferice sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C} \qquad (II.1)$$

2. *Formula cosinusului unei laturi a triunghiului sferic.* Cosinusul unei laturi a triunghiului sferic este egal cu produsul cosinusurilor celorlalte două laturi adunat cu produsul sinusurilor aceloraşi laturi şi a cosinusului unghiului dintre ele.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \qquad (II.2)$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

3. *Formula cosinusului unui unghi al triunghiului sferic.* Cosinusul unui unghi al triunghiului sferic este egal cu produsul cosinusurilor celorlalte două unghiuri cu semn schimbat, adunat cu produsul sinusurilor aceloraşi unghiuri şi a cosinusul laturii dintre ele. (Formulele transformate polar ale formulelor II.2)

$$\cos A = - \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$
$$\cos b = - \cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \qquad (II.3)$$
$$\cos c = - \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

4. *Formula produsului sinusului unei laturi cu cosinusul unghiului adiacent(formula celor cinci elemente).*

Produsul sinusului unei laturi cu cosinusul unghiului adiacent este egal cu produsul cosinusurilor laturii opuse acestui unghi prin sinusul celei de-a treia laturi, din care se scade produsul sinusului laturii opuse prin cosinusul celei de-a treia şi cu cosinusul unghiului dintre ele:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$$

$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$$

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \qquad (II.4)$$

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$$

5 *Formula produsului sinusului unghiului cu cosinusul unei laturi adiacente.* Produsul sinusului unui unghi prin cosinusul laturii adiacente, este egal cu produsul cosinusului opus acelei laturi prin sinusul celui de-al treilea unghi, adunat cu produsul sinusului unghiului opus cu cosinusul celui de-al treilea unghi şi cu cosinusul laturii dintre ele. (Transformatele polare ale formulelor II.4).

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$$

$$\sin A \cos c = \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a$$

$$\sin B \cos c = \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b$$

$$\sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b \qquad (II.5)$$

$$\sin C \cos a = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c$$

$$\sin C \cos b = \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c$$

6. *Formula cotangentelor (formula celor patru elemente alăturate).*

Produsul cotangentei unei laturi prin sinusul laturii alăturate este egal cu produsul dintre cosinusul celei de-a doua laturi prin cosinusul unghiului

cuprins între ele, adunat cu produsul dintre sinusul aceluiaşi unghi şi cotangenta unghiului opus primei laturi.

$$\text{ctg a sin b} = \text{cos b cos C} + \text{sin C ctg A}$$

$$\text{ctg a sin c} = \text{cos c cos B} + \text{sin B ctg A}$$

$$\text{ctg b sin c} = \text{cos c cos A} + \text{sin A ctg B} \qquad \text{(II.6)}$$

$$\text{ctg b sin a} = \text{cos a cos C} + \text{sin C ctg B}$$

$$\text{ctg c sin a} = \text{cos a cos B} + \text{sin B ctg C}$$

$$\text{ctg c sin b} = \text{cos b cos A} + \text{sin A ctg C}$$

B. Reguli pentru rezolvarea unui triunghi sferic dreptunghic.

Fie un triunghi sferic ABC, fig.II 2, în care unghiul A=90°, iar latura "*a*" este ipotenuza.

La rezolvarea acestui triunghi vom conveni:

a) În locul catetelor „b" şi „c" vom considera în calcule complementele lor până la 90°, adică 90°-b şi 90°-c.
b) Unghiul drept "A" nu-l vom lua în considerare.

Atunci, triunghiurile dreptunghiulare pot fi rezolvate după următoarele reguli:

1. *Cosinusul unui element din triunghiul sferic dreptunghic este egal cu produsul sinusurilor elementelor opuse*. În conformitate cu această regulă vom avea:

$$\text{cos a} = \text{cos b cos c}$$

$$\text{cos B} = \text{cos b sin C}$$

$$\text{cos C} = \text{cos c sin B} \qquad \text{(II.7)}$$

$$\text{sin b} = \text{sin a sin B}$$

$$\text{sin c} = \text{sin a sin C}$$

2. Cosinusul unui element este egal cu produsul cotangentelor elementelor alăturate. Pe baza acestei reguli vom avea:

$$\text{cos a} = \text{ctg B ctg C}$$

$$\text{cos B} = \text{ctg a tg c}$$

$$\text{cos C} = \text{ctg a cotg b} \qquad \text{(II.8)}$$

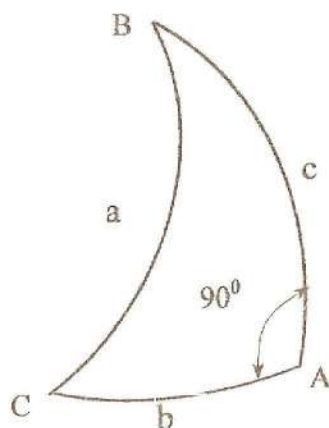
$$\text{sin b} = \text{tg c ctg C}$$

$$\text{sin c} = \text{tg b ctg B}$$

C. Formulele pentru rezolvarea triunghiurilor sferice cu unghiuri ascuţite

Pentru rezolvarea triunghiurilor sferice cu unghiuri ascuţite, pe lângă formulele de bază arătate mai sus, se mai folosesc în anumite cazuri şi următoarele formule:

1. *Formulele în funcţie de semiperimetru.*



$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin c\sin a}} \qquad (II.9)$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin c\sin a}}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}$$

$$tg\frac{A}{2}=\frac{m}{\sin(p-a)}$$

$$tg\frac{B}{2}=\frac{m}{\sin(p-b)}$$

$$tg\frac{C}{2}=\frac{m}{\sin(p-c)}$$

unde :

$$m=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}$$

1. *Teorema tangentelor*

$$\frac{tg\frac{a-b}{2}}{tg\frac{a+b}{2}}=\frac{tg\frac{A-B}{2}}{tg\frac{A+B}{2}} \qquad (II.10)$$

2. *Formula sinusului jumătății excesului sferic*

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} \qquad (II.11)$$

3. *Formulele sinusului și cosinusului semisumei și semidiferenței unghiului triunghiului sferic:*

$$sin\frac{A+B}{2}=\frac{cos\frac{a-b}{2}}{cos\frac{c}{2}}cos\frac{C}{2}$$

$$sin\frac{A-B}{2}=\frac{sin\frac{a-b}{2}}{sin\frac{c}{2}}cos\frac{C}{2}$$

$$cos\frac{A+B}{2}=\frac{cos\frac{a+b}{2}}{cos\frac{c}{2}}sin\frac{C}{2} \qquad (II.12)$$

$$cos\frac{A-B}{2}=\frac{sin\frac{a+b}{2}}{sin\frac{c}{2}}sin\frac{C}{2}$$

4. *Analogiile lui Nepper:*

$$tg\frac{A+B}{2}=\frac{cos\frac{a-b}{2}}{cos\frac{a+b}{2}}ctg\frac{C}{2}$$

$$tg\frac{A-B}{2}=\frac{sin\frac{a-b}{2}}{sin\frac{a+b}{2}}ctg\frac{C}{2} \qquad (II.13)$$

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{cos\frac{A-B}{2}}{cos\frac{A+B}{2}}tg\frac{c}{2}$$

$$tg\frac{a-b}{2}=\frac{sin\frac{A-B}{2}}{sin\frac{A+B}{2}}tg\frac{c}{2}$$

III NOTIUNI DE MATRICI

- **Matrice pătrată.** Matricea "A" este o matrice pătrată dacă numărul coloanelor este egal cu numărul liniilor şi este egal cu dimensiunea matricei: dim(colA) = dim(linA) = dim(A).
- **Matrice simetrică**. O matricea simetrică "S" este o matrice pătrată pentru care $s_{ij} = s_{ji}$ cu i,j = 1,.dim "S", unde cu s_{ij} s-a notat un element al matricei aflat pe linia "i" şi coloana "j".
- **Matrice antisimetrică.** Matricea "A" este antisimetrică dacă este o matrice pătrată pentru care $a_{ij} = -a_{ji}$ cu i',j = 1,..., dim"A" şi $i \neq j$.
- **Matrice diagonală.** Matricea "A" este o matrice diagonală dacă ea este pătrată şi dacă elementele ei îndeplinesc condiţia $a_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$.
- **Matrice unitate. "I"** este o matrice unitate dacă ea este o matrice diagonală pentru care $i_{ii} = 1$ pentru i = **1,...dim"I"**.
- **Matricea superior (inferior) triunghiulară** este matricea pătrată pentru care toate elementele de deasupra (dedesubtul) diagonalei principale sunt egale cu zero.
- O **matrice pozitiv definită "A"** este o matrice pătrată pentru care forma pătratică $\mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{a}$ este un număr pozitiv pentru orice

$a \neq 0$.

- O **matrice ortogonală "A"** este matricea reală pentru care toţi vectorii coloană (linie) satisfac următoarele egalităţi:

$$a_i^T a_j = \begin{cases} 0 \; pentru \; i \neq j \\ 1 \; pentru \; i = j \end{cases} \qquad \text{(III.1)}$$

- **Urma unei matrice pătrate** este numărul carte rezultă din adunarea elementelor de pe diagonala matricei:

$$\text{urma(A)} = \sum_{i=1}^{\dim(A)} a_{ii} \qquad \text{(III.2)}$$

Se poate arăta că pentru o matrice pozitiv definită "A" există relaţia: $a^T Aa$ = urma($aa^T A$) şi că pentru două matrici "A" şi "B" există relaţia *urma(AB) = urma(BA)* dacă cele două produse există.

- **Determinantul unei matrice.** Fiecărei matrice pătrate îi este asociat un număr real numit *determinant*, notat det(A), ce poate fi obţinut cu relaţia:

$$\det(A) = \prod a_{ii}^{(i-1)}; \quad a_{ii}^{(0)} = a_{ii} \text{ (suma celor dim(A) pivoţi)}$$

(III.3)

- **Matrice singulară.** O matrice "A" este nesingulară, dacă şi numai dacă det(A) $\neq 0$, în caz contrar ea fiind o matrice singulară. O matrice pozitiv definită este întotdeauna o matrice nesingulară.

- **Rangul unei matrice.** Rangul unei matrice *rang(A),* este dat de numărul liniilor sau coloanelor liniar independente. Dacă pentru o matrice pătrată "A" rangul acestei matrice este mai mic decât dimensiunea ei atunci se spune că matricea "A" are

defect de rang, defectul fiind dat de relaţia: *d = dim(A) -* rang(A).

- **matrice cu defect de rang este o matrice singulară.**

- **Matrice inversă.** Dacă există matricea pătrată "B" astfel încât produsul dintre ea şi o matrice pătrată nesingulară "A" să fie egal cu matricea unitate (BA = I) atunci ea se numeşte inversa matricei "A" şi se notează cu A^{-1}.

  - Orice matrice nesingulară pătrată are una şi numai o singură inversă. Există totuşi şi pentru matrice pătrate singulare inverse de un anumit tip, numite inverse generalizate.

  -Inversa unei matrice simetrice este tot o matrice simetrică.

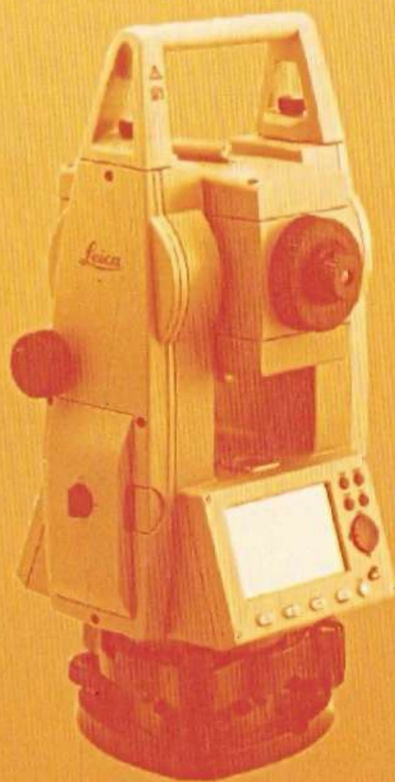
  - Inversa unei matrice diagonale nesingulare este tot o matrice diagonală, elementele acesteia fiind obţinute prin inversarea elementelor de pe diagonala matricei iniţiale: $(diag(a_i))^{-1} = diag(a_i^{-1})$.

  - Pentru o matrice pătrată ortogonală inversa este egală cu transpusa matricei: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$.

- **Transpusa unei matrici** Transpusa matricei "A", notată cu A^T, se obţine din matricea iniţială prin schimbarea liniilor în coloane, astfel că linia "I" din "A" devine coloana "j" din A^T.

- **Minorul.** Minorul elementului a_{ij}, al unei matrice pătrate de dimensiuni "n", este determinantul de ordinul n-1 ataşat submatricei obţinute prin eliminarea liniei "i" şi coloanei "j".

CUPRINS



ISBN:
973-744-024-2
978-973-744-024-2